

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
„ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

Ю.М. Андрєєв, Д.В. Лавінський, О.К. Морачковський

**ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА
КОМП’ЮТЕРНИЙ ПРАКТИКУМ**

Навчальний посібник
для студентів спеціальностей
«Комп’ютерні науки» та «Комп’ютерна механіка»
інженерно-фізичного факультету

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 2 від 12.12.2013

Харків
НТУ «ХПІ»
2014

УДК 531/534:004

ББК 22.2:32.973

А-65

Рецензенти:

К.В. Аврамов, д-р техн. наук, проф., Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України;

В.П. Ольшанський, д-р фіз.-мат. наук, проф., Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. П.Василенка.

Автори: *Ю.М. Андрєєв*, д-р техн. наук, проф., *Д.В. Лавінський*, канд. техн. наук, доц., *О.К. Морачковський*, д-р техн. наук, проф.

Андрєєв Ю.М.

А-65 Теоретична механіка. Комп'ютерний практикум : навч. посіб. / Ю.М. Андрєєв, Д.В. Лавінський, О.К. Морачковський. – Х. : НТУ «ХПІ», 2014. – 240 с.

ISBN

Посібник присвячено міждисциплінарному викладу основ теоретичної і аналітичної механіки та сучасної наукової дисципліни – «Інформаційні технології». Надано загальні відомості комп'ютерного аналізу статички, кінематики та динаміки машин і механізмів засобами програмного комплексу «КіДиМ», який створено на кафедрі теоретичної механіки НТУ «ХПІ».

Посібник розрахований на студентів та осіб, які займаються комп'ютерним моделюванням та розв'язанням обчислювальних задач.

Іл. 96. Табл. 21. Бібліогр. 10 найм.

УДК 531/534:004

ББК 22.2:32.973

ISBN

© Андрєєв Ю.М., Лавінський Д.В.

Морачковський О.К., 2014 р.

©НТУ «ХПІ», 2014 р.

З М І С Т

Передмова	5
1. ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ДЛЯ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ	8
1.1. Сучасні інформаційні технології в освіті	8
1.2. Основні характеристики ПК КіДиМ та його інтерфейсу	12
Питання для самоконтролю	26
2. СТАТИКА	27
2.1. Теоретичний матеріал	27
2.2. Визначення реакцій за умов дії плоскої системи сил	34
2.2.1. Завдання для самостійної роботи	40
2.3. Визначення реакцій складеної конструкції при дії плоскої си-	
стеми сил.	46
2.3.1. Завдання для самостійної роботи	50
2.4. Визначення реакцій при дії просторової системи сил.	56
2.4.1. Завдання для самостійної роботи	59
Питання для самоконтролю	67
3. КІНЕМАТИКА	68
3.1. Кінематика точки. Теоретичний матеріал.	68
3.2. Дослідження кінематики плоского руху систем тіл	72
3.2.1. Теоретичний матеріал	72
3.2.2. Дослідження кінематики кривошипно-шатунного механізму	77
3.2.3. Комп'ютерне моделювання кінематики кривошипно-	
шатунного механізму.	82
3.2.4. Завдання для самостійної роботи	87
3.3. Дослідження кінематики складного руху точки	93
3.3.1. Аналітичні дослідження.	93
3.3.2. Комп'ютерне моделювання складного руху точки	98
3.3.3. Завдання для самостійної роботи	104
Питання для самоконтролю	109
4. ДИНАМІКА	110
4.1. Коливання матеріальної точки	110
4.1.1 Теоретичний матеріал.	110
4.1.2 Комп'ютерне моделювання коливань матеріальної точки. . .	120
4.1.3. Завдання для самостійної роботи	125
4.2. Дослідження руху механічної системи.	131

4.2.1. Аналітичні дослідження руху механічних систем за допомогою загальних теорем динаміки	131
4.2.2. Дослідження руху механічної системи з використанням інформаційних технологій	138
4.2.3. Завдання для самостійної роботи	146
Питання для самоконтролю	153
5. АНАЛІТИЧНА МЕХАНІКА	154
5.1. Теоретичний матеріал	154
5.2. Рівняння руху систем з одним ступенем вільності.	164
5.2.1. Рівняння в'язей та узагальнені координати	164
5.2.2. Рівняння Лагранжа для систем з одним ступенем вільності .	166
5.2.3. Розв'язок рівняння Лагранжа і його аналіз	170
5.2.4. Використання інформаційних технологій для систем з одним ступенем вільності.	172
5.2.5. Завдання для самостійної роботи	177
Питання для самоконтролю	185
6. НАУКОВО-ДОСЛІДНІ РОБОТИ З МЕХАНІКИ З ВИКОРИСТАННЯМ КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ	186
6.1. Дидактичні вказівки щодо виконання курсових дослідних робіт.	187
6.1.1. Курсова робота за темою «АНАЛІЗ СТАТИКИ ТА КІНЕМАТИКИ СИСТЕМ ТІЛ»	187
6.1.2. Курсова робота за темою «ДИНАМІКА ТОЧКИ ТА СИСТЕМ ТІЛ»	189
6.2. Зразок оформлення курсової роботи.	190
7. КОМП'ЮТЕРНИЙ ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ.	207
7.1. Робота 1. Комп'ютерне моделювання кінематики точки, яка здійснює одночасно два ортогональних коливання.	208
7.2. Робота 2. Дослідження руху точки при моделюванні профілювання коліс зубчастих передач.	212
7.3. Робота 3. Дослідження плоского руху маніпулятора з захватом деталей з нахилоного лотка.	222
7.4. Робота 4. Визначення зусиль у вузлах механізму маніпулятора за умов рівноваги під дією плоскої системи сил.	227
7.5. Робота 5. Дослідження коливань теліжок із пружнодисипативним зчепленням шляхом моделювання динаміки точки	234
Перелік джерел інформації.	239

ПЕРЕДМОВА

Цей навчальний посібник присвячено міждисциплінарному викладу основ історично давньої наукової дисципліни – класичної механіки, зокрема, теоретичної і аналітичної механіки, та сучасної наукової дисципліни – «Інформаційні технології». Посібник підготовлено для студентів, що навчаються на Інженерно-фізичному факультеті Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» (НТУ «ХПІ») за бакалаврськими напрямками: «Комп'ютерні науки» та «Комп'ютерна механіка». Посібник відображає сучасний стан впровадження у навчальний процес теоретичної та аналітичної механіки у Національному технічному університеті «Харківський політехнічний інститут», інформаційних технологій, які базуються на застосуванні комп'ютерів.

Розвиток виробництва, бізнесу, освіти і суспільства в цілому вчені, політики, бізнесмени багато в чому пов'язують з широким використанням інформаційних ресурсів Інтернет і зростаючими інтелектуальними можливостями обчислювальних машин, особливо найбільш поширених їх видів – персональних комп'ютерів РС.

З появою перших електронних обчислювальних машин – комп'ютерів – сфера їх застосування охопила практично всі підрозділи людської діяльності. Сьогодні неможливо уявити собі ефективну організацію роботи без застосування комп'ютерів у таких областях, як планування і управління виробництвом, проектування і розробка складних технічних пристроїв, видавнича діяльність, освіта – загалом, в усіх областях, де виникає необхідність у обробці великих обсягів інформації. Однак найбільш важливим, як і раніше, залишається використання їх у тому напрямку, для якого вони, власне, й створювалися, а саме для ви-

рішення великих завдань, що вимагають виконання величезних обсягів обчислень. Такі завдання виникли в середині минулого століття в зв'язку з розвитком атомної енергетики, авіабудування, ракетно-космічних технологій та ряду інших галузей науки і техніки.

Вивчення принципів обробки інформації та організації обчислень у посібнику проведено на прикладах розгляду проблем механіки, при цьому рішення завдань доведено до отримання результатів на ЕОМ шляхом використання програмних розробок. З цією метою в посібнику представлено комп'ютерний практикум на ПЕОМ, який можна виконати самостійно. Посібник можна використовувати як практичне керівництво для набуття досвіду і навичок в освоєнні сучасних технологій при розв'язанні інженерних задач механіки.

Навчальний посібник призначено для студентів та викладачів, для осіб, які займаються комп'ютерним моделюванням та розв'язанням об'ємних обчислювальних завдань. Рекомендується студентам, викладачам та аспірантам природничих та технічних факультетів університетів. Один з авторів посібника – д-р техн. наук, професор Андрєєв Ю.М. є розробником програмного засобу, що застосовується у посібнику. Разом зі студентами та аспірантами автори посібника збагатили свій досвід у використанні комп'ютерних технологій у навчальному процесі.

За своєю структурою посібник складається з семи розділів. У перших п'яти розділах посібника наводяться загальні відомості про аналітичні алгоритми комп'ютерної алгебри на підставі короткого опису програмного комплексу КіДиМ (ПК КіДиМ) для комп'ютерного аналізу статички, кінематики та динаміки машин і механізмів, створеного на кафедрі теоретичної механіки Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». На цій основі створено комп'ютерний практикум з теоретичної механіки, який можна проінсталиювати на персональний комп'ютер, а також використовувати безпосередньо у мережі Internet. Наведені матеріали відображають досвід застосування нових інформаційних технологій при розв'язанні завдань статички, кінематики та динаміки і аналізу розв'язків з позицій встанов-

лення закономірностей технічних систем, які практично важливі при проектуванні реальних технічних об'єктів.

Студентам запропоновано для самостійної роботи варіанти завдань за чотирма модулями курсу лекцій і практичних занять з теоретичної механіки, яка викладається за навчальними планами для студентів за бакалаврськими напрямками – «Комп'ютерні науки» та «Комп'ютерна механіка» на Інженерно-фізичному факультеті НТУ «ХПІ». Питання для самоконтролю допоможуть читачеві перевірити ступінь оволодіння матеріалом цих розділів посібника. Скоріше, ця частина посібника є практичним керівництвом, в якому автори спробували систематизувати свій власний досвід застосування комп'ютерних інформаційних технологій стосовно завдань теоретичної механіки.

Шостий та сьомий розділи посібника присвячено науково-дослідним курсовим та лабораторним роботам, які передбачено робочою навчальною програмою для студентів різних спеціальностей Інженерно-фізичного факультету НТУ «ХПІ». Вибір комп'ютерних технологій для виконання завдань до курсової роботи надається студенту. Наведений приклад виконання курсової роботи базується на використанні ПК КіДиМ. Вивчення даного прикладу надає читачеві можливість оцінити трудомісткість чисельного моделювання і чисельного експерименту, якими зазвичай заповнюють проміжок між фізичними експериментами та аналітичними підходами.

Як відомо, інженерна освіта припускає проведення лабораторних робіт із застосуванням комп'ютерних інформаційних технологій. Завданням подібних розробок є надання можливості студенту із мінімальними витратами на освоєння інформаційних технологій переконатися у повноцінності отриманих знань. Саме на це спрямований сьомий розділ даного посібника, який містить п'ять комп'ютерних лабораторних робіт з різних розділів теоретичної механіки.

Автори вдячні професорам: д-ру фізико-математичних наук Ольшанському В.П. і д-ру технічних наук Аврамову К.В. – рецензентам посібника.

1. ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ДЛЯ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ

1.1. Сучасні інформаційні технології в освіті

Інформатизація та комп'ютеризація суспільства є закономірностями сучасності. Мотивація інформатизації суспільства міститься у бажанні використовувати у всіх видах людської діяльності достовірне, вичерпне і своєчасне знання. У комп'ютеризації важлива роль належить розвитку і впровадженню технічної бази комп'ютерів для оперативного отримання результатів переробки і накопичення інформації. Комп'ютер є універсальним технічним засобом обробки будь-якої інформації, підсилювачем інтелектуальних можливостей людини і суспільства в цілому, а комунікаційні засоби, які використовують комп'ютери, служать для зв'язку і передачі інформації.

Використання комп'ютерів в освіті стимулює появу нових інформаційних освітніх технологій, які дозволили підвищити якість навчання, створити нові засоби виховної дії, ефективніше взаємодіяти викладачам і учням з обчислювальною технікою. У вищих навчальних закладах існує потреба у ознайомленні викладачів з досвідом застосування інформаційно-комунікаційних технологій на практиці для підвищення якості навчання в сучасному інформаційному суспільстві.

Дослідження спеціалістів встановлюють, що створення і розвиток інформаційного суспільства неможливі без широкого застосування інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) в освіті, без застосування в навчальному процесі мультимедійних засобів, технологій Web 2.0, Web-технологій в on-line навчанні, дистанційного навчання тощо.

Напрямок використання та застосування ІКТ впливає на навчальний процес. Ефективність впровадження ІКТ в освіту залежить від рівня оснащення навчального закладу комп'ютерною технікою. Активне й ефективне впровадження цих технологій в освіту є важливим чинником створення системи освіти та визначається низкою переваг:

♦ істотно прискорює передачу знань і накопиченого технологічного і соціального досвіду людства не лише від покоління до покоління, але й від однієї людини до іншої;

♦ підвищує якість навчання й освіти, дозволяє людині успішніше і швидше адаптуватися до довкілля і соціальних змін, що відбуваються. Це дає кожній людині можливість отримувати необхідні знання як сьогодні, так і в майбутньому;

♦ допомагає соціальному розвитку особи та підвищенню освітніх результатів кожного учня або студента;

♦ відповідає вимогам інформаційного суспільства і процесу реформування традиційної системи освіти в світлі вимог сучасного суспільства.

Системи освіти держав відрізняються за цілою низкою показників, і в тому числі, за доступністю інформаційних технологій. Відсутність досвіду у використанні комп'ютерів у викладанні, кваліфікація викладача і його вміння користуватися комп'ютером, мережею Інтернет, сучасними інформаційно-комунікаційними технологіями впливають на те, як вбудовувати ІКТ в освітній процес.

Слід погодитись з відомим висловленням одного з фахівців у галузі інформатизації освіти: «Комп'ютеризація сама по собі не веде автоматично ні до гарної, ні до поганої освіти. Комп'ютеризація – це дорога до іншої освіти». Комп'ютери служать підмогою, що дозволяє заощадити час і зробити роботу ефективнішою: здійснити пошук інформації, вирішити більшу кількість завдань і зменшити домашнє завдання, проаналізувати результати, скористатися графічними можливостями комп'ютера, стимулювати пізнавальну і творчу активність і самостійність студентів, сприяти розвитку інтересу до навчального предмета, формуванню комунікативних навичок, забезпеченню об'єктивного контролю знань, якості засвоєння матеріалу й таке інше. Отже, нові інформаційні технології, що застосовуються методично грамотно, підвищують пізнавальну активність учнів, що, поза сумнівом, приводить до підвищення ефективності навчання. І досвід закордонних колег у цій діяльності є дуже важливим для нас.

Успішність навчання з використанням мультимедійних засобів і різних методик їх застосування істотно відмінні в результатах залежно від методик навчання та їх ефективного використання в мультимедійному середовищі.

Wiki як технологія Web 2.0 має особливу ефективність в посиленні взаємодії, що досягається використанням існуючих методик застосування on-line технологій. Дослідження показало, що взаємодія через wiki надає більшу активність учням, ніж взаємодія із застосуванням інших on-line технологій (наприклад, електронна пошта, дискусійні форуми). Важливість активності студентів у використанні on-line технологій (аналізувалися 30 on-line класів із 4 навчальних закладів) вказує на велику значущість активності для успішного навчання. Оскільки активна участь студента критична для успіху і якості on-line освіти, то підвищення уваги до розвитку цієї властивості є ключовим моментом в освітньому on-line середовищі.

Досвід практичних занять часто є основою будь-якого навчального курсу. Якщо не будуть створені ефективні механізми комунікації студента з викладачем під час on-line навчання, практичні заняття не принесуть користі, студента не можна залишати ізольованим, вічно із труднощами, які можуть трапитись під час навчання.

Широко відомо, що якісне викладання неможливо без зворотного зв'язку студента з викладачем. Зворотний зв'язок може бути як синхронним, так і асинхронним. Для кращого розуміння типів і частоти взаємодії зворотного зв'язку студента з викладачем було проаналізовано зворотний зв'язок протягом одного семестру викладання on-line курсу. Частота зворотного зв'язку змінювалась протягом цього часу і була найвищою на початку курсу. Якщо порівнювати індивідуальну роботу з роботою в команді, то виявилось, що команди прагнуть отримувати виправний зворотний зв'язок, тоді як індивідууми – мотиваційний. Дослідження показало, що викладач має усвідомлювати хибність зайвих сеансів мотиваційного зворотного зв'язку з найактивнішими студентами, бо студенти схильні до отримання постійної не педагогічної допомоги.

Останніми роками інструментами Web 2.0, такими як блоги, wiki і podcasts, стала користуватися значно більша кількість освітян. Ці застосування є інноваціями в освіті. Фахівці з початкової освіти південно-східного коледжу США дослідили вплив використання wiki в on-line навчанні. Хоча студенти спочатку не довіряли новій технології, але згодом визнали її позитивний вплив на навчання. Автори багатьох досліджень наводять перелік проблем, які висвітлювалися в процесі дослідження wiki як навчального засобу, і мінімізують обмеження, пов'язані з використанням wiki. Ці проблеми полягають у відмінностях в сприйнятті студентами навчального матеріалу за традиційною схемою навчання у класній кімнаті і використанні Web-технологій при on-line навчанні. Особлива увага приділяється тому, наскільки позитивно дистанційне навчання впливає на підвищення інтересу студентів до вивчення курсу. Хоча існує гіпотеза, що студенти в традиційному навчальному середовищі демонструють вищий рівень задоволення в освоєнні курсу, ніж студенти в on-line середовищі, ця гіпотеза не підтвердилась. Замість цього підтвердилась протилежна: студенти в on-line групі виявили вищий рівень задоволення курсом. Отримані дані сприятимуть більш широкому впровадженню on-line курсів.

Інтернет надає безпрецедентний спосіб отримання інформації. Кожен, хто має доступ до World Wide Web (WWW), може отримати всю наявну у ньому інформацію, а також потужні засоби її пошуку. Можливості для освіти, бізнесу та зростання взаєморозуміння між людьми стають просто приголомшливими. Більше того, технологія Web дозволяє поширювати інформацію всюди. Простота цього способу не має аналогів в історії. Для того щоб зробити свої погляди, товари або послуги відомими іншим, більше немає необхідності купувати простір в газеті чи журналі, платити за час на телебаченні та радіо. Web робить правила гри однаковими для уряду і окремих осіб, для малих і великих фірм, для виробників і споживачів, для благодійних і політичних організацій. WWW в Інтернеті – це найдемократичніший носій інформації: з його допомогою будь-хто може сказати і почути сказане без проміжної інтерпретації, спотворення і цензури, керуючись певними рамками

пристойності. Інтернет забезпечує унікальну свободу самовираження особистості та інформації.

Зупинимось на використанні інформаційних та комп'ютерних технологій у інженерній освіті. Інженерна освіта припускає проведення практичних та лабораторних занять із застосуванням комп'ютерних та Інтернет-технологій. В даний час поширення набувають сучасні електронні конспекти лекцій, електронні версії методичних вказівок, мультимедійні продукти (віртуальні лабораторні роботи, лекційні демонстрації тощо), спеціалізовані бази даних та комп'ютерні лабораторні практикуми. Завданням таких розробок є надання допомоги студенту і викладачу в тому, щоб з мінімальними витратами на освоєння інформаційних технологій переконатися в повноцінності отриманих знань. Найбільшою привабливістю володіють програмні продукти, що містять текстовий, математичний і графічний процесори.

1.2. Основні характеристики ПК КіДиМ та його інтерфейсу

Назву програмного комплексу КіДиМ складено з трьох слів: «*кінематика*», «*динаміка*» та «*машини*» або «*механізми*». Комплекс призначено для проведення розрахунків за аналізом статички, кінематики та динаміки матеріальних точок та систем твердих тіл. ПК КіДиМ створювався на кафедрі теоретичної механіки Харківського політехнічного інституту з початку 80-х років XX сторіччя. З 1996 року навчальну версію впроваджено в навчальний процес курсів теоретичної та аналітичної механіки. У 2001 році був створений дистанційний курс «Практикум з теоретичної механіки на базі системи комп'ютерної алгебри», який можна знайти в Інтернеті за адресою: <http://dl.kpi.kharkov.ua/techn/tu16/default.asp?rus>. Є сайт kidym.ru, з якого можна встановити на своєму компютері ПК КіДиМ, та отримати іншу корисну інформацію.

Відмінністю даного ПК від більшості інших, які застосовуються для виконання завдань в інженерній практиці, є наявність вбудованої системи комп'ютерної алгебри (СКА). Це суттєво полегшує роботу ко-

ристувача, підвищує надійність одержаних результатів та надає можливість:

- ◆ використовувати дуже гнучку мову вводу та редагування аналітичної та чисельної вхідної інформації;
- ◆ організовувати більш глибоку діагностику вихідних даних, ніж це має місце зазвичай;
- ◆ уніфікувати підготовку вихідних даних для різних видів розрахунків;
- ◆ повністю автоматизувати процес побудови математичної моделі;
- ◆ автоматизувати аналіз процесу, що розраховується;
- ◆ виключити виникнення помилок при громіздких аналітичних перетвореннях.

ПК КіДиМ функціонує у 32-бітній (64-бітній) операційній системі WINDOWS як повноцінна WINDOWS-програма з сучасним інтерфейсом. Підготовка вихідних даних, які розташовані у текстових файлах із ASCII (DOS) кодуванням (866 таблиця), їх редагування, перегляд результатів розрахунків, друкування проводять у спеціальному редакторі КіДиМ. Мова реалізації – C++, середовище розробки – BORLAND BILDER C++ 6.0.

Підготовка вихідних даних засобами персональних комп'ютерів здійснюється у спеціальному керівному модулі – оболонці ПК КіДиМ, який виконує функції текстового редактора і дозволяє створити або відкрити вихідні файли завдань, проглянути файли звітів, діагностики, помилок та повідомлень операторів (препроцесорів) і викликає інші модулі ПК залежно від виду завдань: статика, кінематика, динаміка та ін. Розрахунки відбуваються у програмних модулях, які викликаються оболонкою відповідно до необхідних видів аналізу – розв'язання прямої задачі кінематики, прямої або оберненої задачі динаміки, задачі статичної рівноваги, розрахунку характеристик вільних (лінійних та нелінійних) та вимушених (лінійних) коливань. При цьому формуються аналітичні та чисельні результати у вигляді формул, графіків, таблиць, розкладань у ряд Фур'є, лінійних та кубічних сплайнів, анімації. Ці результати можуть бути включені у звіти та збережені у файлах для

подальшого використання в розрахунках та документах. Вихідні дані записуються в аналітичному вигляді з використанням допоміжних рисунків та являють собою опис механічної моделі процесу, що розраховується. Робочими мовами ПК КіДиМ є російська, українська та англійська, які активізуються в режимі головного меню «*Настройка*» («*Налаштування*», «*Option*»). У подальшому опис інтерфейсу програми та конструкцій мови вихідних файлів в цьому документі базується на російській версії програми. Основні елементи інтерфейсу користувача ПК КіДиМ наведено на рисунку 1.1.

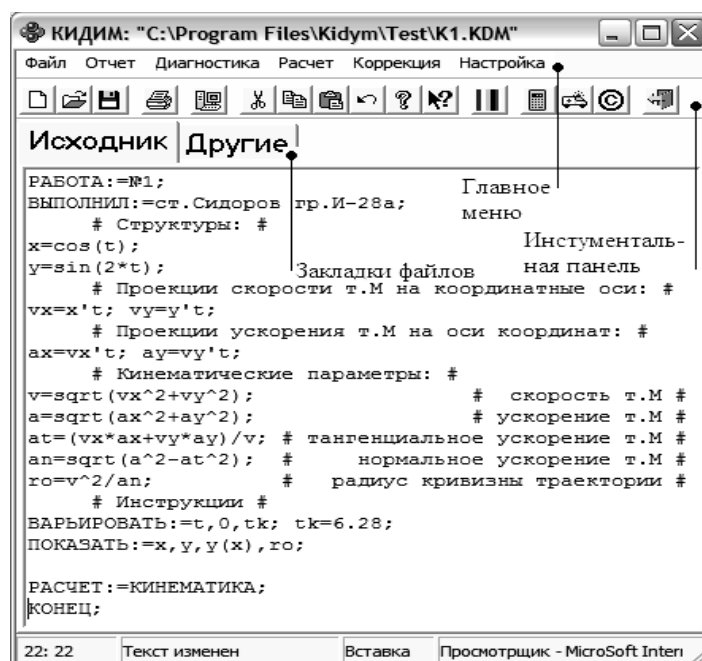


Рисунок 1.1 – Головне вікно ПК КіДиМ

До цих елементів належать: **головне меню, закладки відкриття файлів, панель інструментів.**

Головне меню програми містить такі режими роботи:

«*Файл*» – стандартний режим для WINDOWS-програм, який слугує для створення нових, відкриття існуючих, збереження редагованих файлів вихідних даних, друку текстових файлів, виходу з програми;

«*Расчет*» – залежно від стану перемикача «расчеты последовательно / расчеты параллельно» в режимі головного меню «*Настройка*» викликає або послідовно програми розрахунків, або список розрахунків, які можна провести, для вибору користувачем;

«Коррекция» – також стандартний режим для WINDOWS-програм, який призначений для здійснення обміну текстовою інформацією через буфер обміну WINDOWS при копіюванні, переміщенні, видаленні підсвічених областей файлу, що редагується, пошуку та заміни груп символів, виділення кольором усього файлу, відміни останньої зміни змісту файлу;

«Настройка» – вибирає шрифт, мову, браузер для перегляду html-файлів діагностики, звіту та повідомлень операторів (препроцесорів), показу рисунків, які ілюструють вихідні дані для розрахунку;

«Отчет» – містить звіти, що сформовані при проведенні розрахунків;

«Ошибки» – містить повідомлення про синтаксичні помилки в тексті вихідних даних, що з'являються при проведенні розрахунків;

«Диагностика» – дає можливість ознайомитись з діагностичними повідомленнями за проведеними розрахунками;

«Оператори» – містить звіти препроцесорів, що перед розрахунками обробляють спеціальні записи-оператори у вихідних даних і додають в них необхідні дані в аналітичній формі.

Файлові закладки дозволяють відкрити файли для такого:

«Исходник» – підготовки та редагування вихідних даних;

«Другие» – переглядання та копіювання інформації з будь-яких текстових файлів.

Кнопки інструментальної панелі передбачені для виклику вже названих вище та деяких додаткових функцій при роботі ПК КіДиМ, назви яких з'являються при наближенні до них указника маніпулятора миші.

Діагностика синтаксичних та семантичних помилок у файлі вихідних даних проводиться на початку роботи розрахункового модуля, який викликається за допомогою пункту головного меню «Расчет», або кнопки інструментальної панелі. Повідомлення про синтаксичні помилки з'являються у вікні з образом файлу вихідних даних із вказівкою на місце положення помилки. Повідомлення про семантичні помилки з'являються у спеціальних віконцях і збираються в файлі помилок, що викликається відповідним пунктом головного меню розрахун-

кового модуля. Повернувшись до редактора, ці помилки слід виправити. Якщо помилок немає, то з'явиться розрахункове віконце зі звітом, у якому можна подивитись результати розрахунку у вигляді таблиць, анімацій та графіків, включити їх у файл звіту та роздрукувати.

Для забезпечення зручності роботи існують певні налаштування у вікні редактора та у вікні розрахункових модулів, які можна змінити у режимі головного меню «Настройка», або в контекстному меню (яке викликається натисканням правою клавішею миші над головним вікном редактора або над вікнами графіків у розрахункових модулях). Склад налаштувань можна побачити на рисунку 1.2 – для редактора, та на рисунку 1.3 – для розрахункових модулів. У першому випадку можна обрати шрифт набору даних, мову меню та повідомлень, закрити або відкрити рисунки, які ілюструють вихідні дані, обрати браузер («Встроенный» або інстальований у системі користувача), увійти до «Інерційної бази даних елементів» Фаворіна М.В. для формування інерційних характеристик тіл складної форми. В контекстному меню додатково можна провести необхідні редакційні дії.

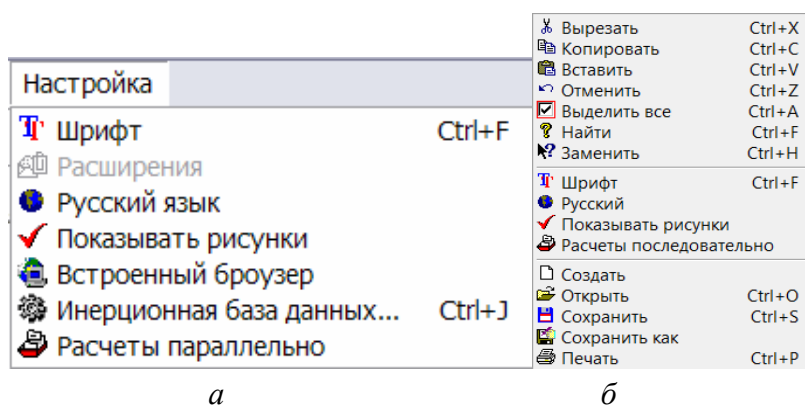


Рисунок 1.2 – Склад налаштувань для редактора:
а – у п. «Настройка» головного меню, *б* – у контекстному меню

У другому випадку можна назначити:

- ◆ кольори основним елементам графіка (передбачена можливість кольорового друку та виводу до файлу кольорового образу графіка, відображення перспективи при показі тривимірних графіків);
- ◆ кількість точок графіків при табулюванні;
- ◆ тип та розмір шрифту на графіках;

- ♦ товщину лінії при відображенні графіків;
- ♦ тривалість анімації у *мілісекундах* та у *секундах*;
- ♦ кількість кадрів в одній секунді при відображенні анімації;
- ♦ процент стиску графіка при збереженні його в BMP-файлі; відносну точність, наприклад, при чисельному інтегруванні рівнянь динаміки;
- ♦ границю відношення масштабів по осях графіків, коли вони є однаковими (щоб, наприклад, коло відображалось колом, а не еліпсом);
- ♦ наявність шлейфа при виводі рухомих об'єктів анімації;



Рисунок 1.3 – Склад налаштувань для розрахункового модулю:
 а – у п. «Настройка» головного меню, б – у контекстному меню

- ♦ розташовування закладок з найменуванням графіків в один чи декілька рядків (для збільшення місця для графіка);
- ♦ необхідність показу таблиці характерних значень графіка;
- ♦ необхідність показу значень сітки графіка ще праворуч та зверху;
- ♦ друкування числа математичних операцій в формулах;

- ◆ користування результатами попередніх розрахунків при незначних редагуваннях файлу вихідних даних, що не змінюють механічну модель процесу та економлять час;

- ◆ збереження кадрів анімації в BMP та (або) в JPEG-файл;

- ◆ представлення динамічних рівнянь у вигляді правої і лівої частини, причому ліворуч показуються члени, що містять узагальнені прискорення;

- ◆ представлення динамічних рівнянь з підстановкою значень змінних і констант;

- ◆ повідомлення про час інтегрування рівнянь динаміки.

Крім того, в контекстному меню можна:

- ◆ викликати звіт для перегляду,

- ◆ записати графік в BMP-файл та включити його в звіт,

- ◆ включити значення графіку – в таблицю звіту,

- ◆ або побудувати сплайн-інтерполяцію і Фур'є-розкладання графіка,

- ◆ програти хід процесу на графіку,

- ◆ прочитати необхідні дані з будь-якої частини графіка,

- ◆ роздрукувати графік на принтері, прочитати файл допомоги та про авторів ПК КіДиМ,

- ◆ завершити роботу з розрахунковим модулем.

Основні конструкції вхідної мови ПК КіДиМ. Файл вихідних даних ПК КіДиМ являє собою звичайний ASCII файл (текстовий файл), який може бути підготовлений будь-яким текстовим редактором. Зручніше робити це вбудованим редактором у ПК КіДиМ.

Назва файлу вихідних даних може бути будь-якою, а розширення рекомендується надавати **«.KDM»** (при використанні вбудованого редактора це забезпечується автоматично). Інформація у файлі надається у вигляді набору синтаксичних конструкцій мови ПК КіДиМ (*«Інструкція»*, *«Формула»*, *«Елемент»*, *«Оператор»*, *«Коментар»*, *«Масив»*), кожна з яких, крім коментарю, закінчується символом ‘;’ («крапка з комою») та розділена будь-якою кількістю пробілів, символів табуляцій, пустих рядків. Коментар обмежується знаками ‘#’ або ‘{’, ‘}’.

Послідовність запису структурних одиниць мови не має значення та може бути будь-якою, крім двох виключень:

♦ інструкція виду розрахунку «РАСЧЕТ := <вид розрахунку>;» повинна закінчувати блок інформації, яка відноситься до цього розрахунку;

♦ інструкція «КОНЕЦ» повинна закінчувати інформацію у файлі.

Для опису синтаксичних конструкцій мови ПК КіДиМ введемо деякі визначення.

Константа – цифровий запис числа (можливо із урахуванням знаку). Розділення цілої та дробової частин можливо у звичайному або експоненціальному представленні, наприклад: **5**, **11.34**, **2.71E-02**, **3.45e+3**.

Число «π» позначається у вихідних даних двома малими латинськими літерами – **pi**.

Змінна – написаний разом літерно-цифровий запис, який розпочинається із літери (літери можуть бути позначені латинськими літерами або кирилицею, «малими» або «великими» – *усі вони програмою розрізняються*). Грецькі літери записуються так, як вони промовляються, за допомогою латинських літер, причому для великої літери слово треба писати також великими літерами. Наприклад: **FI**, **alpha**, **beta**.

Знаки математичних операцій – це символічні позначення:

«+» – «додавання»,

«-» – «віднімання» або «унарний мінус»,

«*» – «добуток»,

«/» – «ділення»,

«^» – «піднесення до степеня»,

«'» – «диференціювання».

Елементарні функції записуються малими літерами, зазвичай – спочатку ім'я, потім у круглих дужках аргумент – змінна або деякий математичний вираз. ПК КіДиМ оперує із такими стандартними функціями: **sqrt()** – «корінь квадратний», **sin()** – «синус тригонометричний», **cos()** – «косинус тригонометричний», **tg()** – «тангенс тригонометричний», **arcsin()** – «арксинус тригонометричний», **arctg()** – «арктангенс тригонометричний», **exp()** – «експонента», **ln()** – «натуральний логарифм», **sh()** – «синус гіперболічний», **ch()** – «ко-

синус гіперболічний», **arsh()** – «арксинус гіперболічний», **abs()** – «абсолютне значення числа», **rand()** – «вибір випадкового числа», **ceil()** – ціле число, що не менше, ніж аргумент, **floor()** – ціле число, що не більше, ніж аргумент. Сюди ж відноситься і факторіал ('!'), аргумент якого, на відміну від інших унарних операцій, пишеться до позначення операції ('!'). При цьому, якщо аргументом є ціле або змінна, то дужки перед '!' можна не ставити.

Є ще функції декількох аргументів, які повертають числове значення. Це **ipl()** – лінійна інтерполяція, **spln()** – сплайн-інтерполяція, **rand()** – випадкове число, **root()** – корінь функції, **intg()** – інтеграл, **summ()** – сума.

Для лінійної інтерполяції або інтерполяції кубічним сплайном таблично заданих функцій застосовуються спеціальні функції **ipl()** і **spln()**, відповідно вони мають два аргументи – перший задає ім'я таблиці (масиву) дискретних значень функції, другий – ім'я змінної – аргументу цієї функції, наприклад, **ipl(ID1, fi)**. Таблиця (масив), що задає дискретні значення функції, яке інтерполюється, являє собою послідовність пар значень аргумент-функція.

Для використання у виразах випадкових чисел і послідовностей використовується функція **rand()**, у якої один аргумент – число, яке вказує верхню межу (нижня – дорівнює нулю) інтервалу, в якому будуть генеруватися випадкові числа, що мають одномірний розподіл.

Дві функції схожі з використання аргументів – **intg(f(x), x, a, b)** і **summ(f(i), i, i0, ik)**. Перша – це запис певного інтеграла, тобто її аргументи задають підінтегральну функцію (яка може бути константою, змінною або виразом), змінну інтегрування (в даному випадку **x**), нижню і верхню межу (**a** і **b**), причому ці межі можуть бути також виразами. В якості підінтегральної функції може стояти також визначений інтеграл або вираз, що містить такий інтеграл. Таким чином будуються кратні інтеграли. Наприклад, вирази

$$\int_0^{2x} \int_{x^2}^{2x} xy^2 dy dx, \int_0^2 x \int_{x^2}^{2x} y^2 dy dx$$

мовою КіДиМ будуть записані:

```

intg(intg(x*y^2, y, x^2, 2*x), x, 0, 2);
intg(x*intg(x*y^2, y, x^2, 2*x), x, 0, 2);

```

Цілком аналогічно записується потрійний інтеграл. Наприклад, інтеграл $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (y^2 + z^2) dz dy dx$ може бути записаний так:

```

intg(intg(intg(y^2+z^2, z, 0, 1-x-y), y, 0, 1-x), x, 0, 1);

```

Для позначення нескінченності в межах невласних інтегралів першого роду слід використовувати зарезервоване для цього слово «**infinity**». Наприклад, інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ треба записати так:

```

intg(f(x), x, -infinity, infinity);

```

Може знадобитися використовувати у формулах першообразну деякого виразу без обчислення числового значення інтеграла. Для цього слід скористатися записом невизначеного інтеграла у вигляді **intg(f(x), x)**, тобто з одним параметром – підінтегральною функцією.

Друга функція **summ(f(i), i, i0, ik)** – це запис суми, тобто її аргументи задають формулу для сумування (яка може бути константою, змінною або виразом), індекс підсумовування (в даному випадку **i**), нижню і верхню його межу (**i0 i ik**). Підсумовуюча формула може містити індексовані змінні й сам індекс підсумовування. Для позначення в іменах змінних нижніх індексів перед позначенням індексу повинен стояти символ '\$'. Якщо необхідно використовувати у формулах числове значення кореня функції, то застосовується конструкція **root(f(x), x, a, b)**, причому її можна використовувати в будь-якому місці формул, подібно **sin** або **cos**. Програма знайде числове значення кореня функції **f(x)**, який розташований всередині інтервалу **[a, b]**, якщо на кінцях заданого інтервалу пошуку кореня функція **f(x)** набуває значення різних знаків.

Зазначимо, елементарні функції записуються строковими (малими) латинськими літерами, усі формули у вихідних даних повинні записуватись так: у лівій частині повинна бути тільки змінна, а не мате-

матичний вираз. Не повинно бути закріплених формул – коли змінна виражається через іншу змінну, яка виражається через першу.

Крім того, можна ще використовувати лінійну інтерполяцію – **ipl()** та кубічні сплайни – **spln()**. Для лінійної та сплайнової (кубічним сплайном) інтерполяції функцій, які задано у вигляді таблиць, використовують спеціальні убінарні операції, відповідно **ipl()**, **spln()**, що мають два аргументи – перший задає назву таблиці дискретних значень функції із двох стовпчиків (аргумент – функція), другий – ім'я змінної (аргументу цієї функції).

Математичний вираз – константа, змінна або сукупність констант та (або) змінних, які розділені знаками математичних операцій та (або) елементарних функцій.

Простий та складений списки: простим списком називають запис послідовності констант або змінних, розділених комами. Якщо після хоча б однієї зі змінних у круглих дужках міститься інший простий список, то такий список називають складеним. Наприклад: простий список – «**t, 0, 4, 4;**», складений список – «**alfa(0, 360, 12), beta(0, 90, 2);**».

Інструкція – це літерна конструкція, що розпочинається із назви, яка написана російськими літерами, після яких стоїть знак ‘;’ («крапка з комою») або знак ‘:=’ («двокрапка, знак рівності») із подальшим списком (простим або складеним). Її синтаксис:

<НАЗВА>; або <НАЗВА>:= <СПИСОК>;

Інструкції призначені для введення у комп'ютер текстової та числової інформації, необхідної для проведення розрахунків, оформлення результатів у табличному, текстовому та графічному вигляді із візуалізацією на екрані монітору та друком на принтері.

Приклади:

ВАРЬИРОВАТЬ := t, tнач, tкон;

ВАРЬИРОВАТЬ ПАРАМЕТРЫ := a(1, 10, 1), b(2, 6, 2);

ТАКТНОСТЬ ДВИГАТЕЛЯ := 4;

ДИАПАЗОН ОБОРОТОВ := 400, 1000, 10;

ПЕЧАТАТЬ := fi10, J.psi5;

РАСЧЕТ = СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ;
КОНЕЦ;

Формула – це конструкція, що розпочинається із змінної, після якої стоїть знак ‘=’ («рівність»), а потім записаний математичний вираз. Її синтаксис:

<ЗМІННА> = <ВИРАЗ>;

Формули у файлі вихідних даних вводять так само, як у мовах високого рівня типу C++, Pascal і т.п., тобто в строку. Для того щоб мати можливість записувати умовні формули, використовується тернарне речення «**Якщо, то, інакше**», синтаксис якого можна записати таким чином:

<УМОВА> ? <ІСТИНА> ! <НЕПРАВДА>;

Тут **<УМОВА>** – це бінарна формула, вигляду:

<В_1> <ОДИН ІЗ ЗНАКІВ>:
'<' , '>' <=' , '>' = '<' , '>' != '<' , '>' = '<'<В 2>

<ІСТИНА> – це вираз, який обчислюється, коли **<УМОВА>** виконується при підстановці значень виразів **<В_1>** та **<В_2>**, **<НЕПРАВДА>** – це вираз, який обчислюється при невиконанні **<УМОВА>**. Формули слугують для введення у комп’ютер різної аналітичної інформації. Усі вони у вихідних даних повинні бути розв’язані відносно змінних та представлені у такому вигляді: у лівій частині стоїть лише змінна, у правій – математичний вираз.

Приклади:

```
A = sin(x);
VB = sqrt(VBx^2 + Vby^2);
VBx = xB' t;
```

Неможна записувати, наприклад, «**R/r = 3;**», а слід записувати «**R = 3*r;**».

Елемент – це конструкція, яка розпочинається із літерно-цифрового злітного запису, після якого стоїть знак ‘.’ («крапка»), потім – змінна, після неї знак ‘=’ («рівність»), а справа від нього – мате-

матичний вираз. Перший запис називають ім'ям елемента, змінну – його координатою, праву частину – характеристикою (значенням) елемента. Синтаксис:

<ІМ'Я_ЕЛЕМЕНТУ>.<ІМ'Я_КООРДИНАТИ> = <ЗНАЧЕННЯ>;

Такі конструкції задають програмі діючі сили: активні, інерції, пружності, дисипативні, тому розрізняють елементи: силові, інерційні, пружні, дисипативні. Відповідно імена елементів розпочинаються з великих латинських літер – ‘P’, ‘J’, ‘C’, ‘D’.

Приклади:

P.x11 = Q*sin(omega*t); – силовий елемент

J.Fi4 = m4*r4^2/2; – інерційний елемент

C.d1 = 1e8; – пружний елемент

Dgtp.Psi2 = beta2; – дисипативний елемент.

Масив – це конструкція, яка розпочинається зі змінної, після якої у квадратних дужках стоїть ціла константа, потім знак ‘=’ («рівність»), а після нього простий список математичних виразів, частіше за все констант. Ціла константа в цьому випадку задає розмір масиву. Синтаксис:

<ІМ'Я_ЗМІННОЇ>[<РОЗМІР>]=<СПИСОК ВИРАЗІВ>;

Така конструкція дозволяє вводити масив констант, функцій, які задані таблицею (наприклад, індикаторні діаграми двигунів), й т.п.

Приклад:

**ид1[12] =0, 9.285, 5, 10.236, 10, 10.204,
15, 9.394, 20, 8.204, 25, 6.950;**

Тверде тіло у ПК КіДиМ задають за допомогою конструкції наступного синтаксису:

Name_i [~Name_{i-1}] | R(α), [S(d,) ...] | m(m_i) , J_x(J_{ix}) , J_y(J_{iy}) , J_z(J_{iz}) ;

де **Name_i** – назва даного тіла *i*; **Name_{i-1}** – назва тіла, у системі координат якого визначають положення системи координат, пов'язаної із даним тілом (за відсутності такого елемента вважають, що положення

даного тіла задається в абсолютній нерухомій системі координат); $[R(\alpha), [S(d), \dots]]$ – список послідовності поворотів ($R(\alpha)$) та переміщень ($S(d)$), який задає перетворення системи координат $(i-1)$ -го тіла у систему координат i -го тіла; $m(m_i)$, $J_x(J_{ix})$, $J_y(J_{iy})$, $J_z(J_{iz})$ – інерційні параметри – маса та складові тензора інерції у головній центральній системі координат тіла. Коли використовується не головна система координат, то сюди треба дописати відцентрові моменти інерції $[J_{xy}(J_{ixy}), J_{yz}(J_{iyz}), J_{xz}(J_{ixz})]$.

Побудова графіків у ПК КіДиМ. Для виводу числової інформації у вигляді графіків необхідно у файлі вихідних даних використовувати інструкції «ПЕЧАТАТЬ» («ПОКАЗАТЬ»), «СРАВНИТЬ», «СОВМЕСТИТЬ», у яких перелічують змінні, які необхідно показати на графіках як функції часу. Якщо в інструкції «ПЕЧАТАТЬ» («ПОКАЗАТЬ») вказати одну змінну як функцію іншої, то це надасть можливість побудувати графік, по осі ординат якого будуть відкладені значення першої змінної, а по осі абсцис – значення другої. Якщо вказати одну змінну як функцію двох інших, то буде збудовано тривимірний графік, по осі аплікату якого будуть відкладені значення першої змінної, а по осях абсцис та ординат – значення другої та третьої змінних. Для зручності розгляду такої просторової кривої її графік буде випадковим чином обертатись у просторі. Наприклад:

ПОКАЗАТЬ := x, y, y(x), z, z(x, y);

У результаті використання такої інструкції будуть побудовані графіки змінних x , y , z як функції часу, графік залежності y від x та тривимірний графік залежності z від x та y . Інструкції «СРАВНИТЬ» та «СОВМЕСТИТЬ» дозволяють вивести на одному графіку декілька змінних. Причому інструкція «СРАВНИТЬ» може відображати до 5 змінних в однаковому масштабі, а інструкція «СОВМЕСТИТЬ» – 2 змінних у власних масштабах. Наприклад:

СРАВНИТЬ := углы(fi2, fi3, fi4);,

СОВМЕСТИТЬ:= углы(fi3(fi2), fi4(fi2));.

У результаті використання першої інструкції у одному й тому ж масштабі будуть побудовані графіки залежності від часу змінних **fi2**, **fi3**, **fi4**, у результаті роботи другої – в різних масштабах будуть побудовані графіки залежності змінних **fi3**, **fi4** від змінної **fi2**.

Питання для самоконтролю

1. Що містять у собі поняття технологія, інформація, інформаційна технологія та який зв'язок між ними?
2. У чому полягають основні принципи сучасних інформаційних технологій?
3. Наведіть основні види інформаційних технологій, у чому полягає спільність поміж Internet-технологіями та комп'ютерними технологіями.
4. Для чого створюють системи комп'ютерної алгебри?
5. Як розшифрувати назву ПК КіДиМ?
6. На яких мовах програмування реалізована система аналітичних обчислень у ПК КіДиМ?
7. У чому є основні особливості ПК КіДиМ?
8. У якій операційній системі функціонує ПК КіДиМ?
9. Чи обов'язково починати текст файлу вихідних даних ПК КіДиМ з інструкцій: **РАБОТА: = №...(тема); ВЫПОЛНИЛ: = (ім'я та прізвище)**, а закінчувати його інструкцією **КОНЕЦ**?
10. Що означають синтаксичні конструкції ПК КіДиМ: **РАБОТА:=**, **ВЫПОЛНИЛ:=**, **ВАРЬИРОВАТЬ:=**, **ПЕЧАТАТЬ:=**, **РАСЧЕТ: =**, **КОНЕЦ**?
11. Наведіть приклади стандартних математичних функцій із якими оперує ПК КіДиМ.
12. Яким чином у ПК КіДиМ записуються математичні формули?
13. Наведіть типи активних сил, які описуються у ПК КіДиМ за допомогою конструкції «*элемент*».
14. За допомогою яких інструкцій відбувається побудова графіків у постпроцесорі ПК КіДиМ?
15. У чому полягає різниця між інструкціями «**СРАВНИТЬ**» та «**СОВМЕСТИТЬ**» ?

2. СТАТИКА

2.1. Теоретичний матеріал

Під розрахунковою схемою розуміють схематичне зображення тіла (системи тіл), рівновагу якого розглядають у задачі, із заданими (активними) силами, що діють на тіло, і силами реакцій накладених на тіло в'язей, з введеною для вирішення задачі системою координатних осей, зі всіма необхідними даними про геометричні розміри і кути, які мають бути або відомими, або визначеними для розв'язання задачі.

Серед заданих сил можуть бути: **зосереджені**, вказані у вигляді векторів (точка прикладення, напрямок, величина та кут дії); **сили ваги** елементів конструкцій (в центрі ваги даного тіла); **розподілені навантаження** із заданою інтенсивністю; **пари сил**, які зазвичай задаються величиною і напрямком моменту.

Розподілені навантаження можуть бути розподілені за деякою площею або по деякій довжині. Вони характеризуються інтенсивністю p або q , вимірюваною в одиницях тиску (Н/м^2 або Н/м). Заміну їх зосередженою силою здійснюють за умов еквівалентності (рис. 2.1).

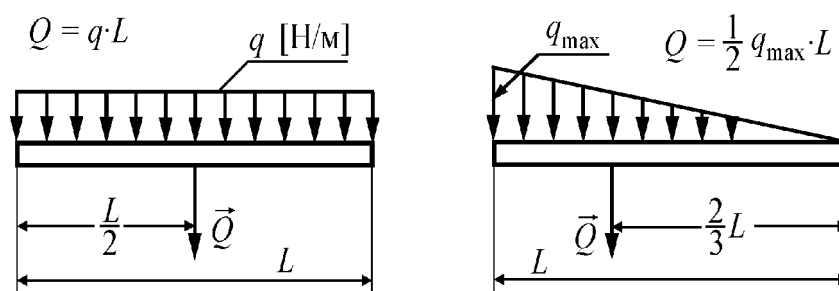


Рисунок 2.1 – Приклади розподілених сил

Графічні зображення змін інтенсивності навантаження по довжині прийнято називати **епюрами**. Їх показано для рівномірно розподіленого навантаження і навантаження, що змінюється по лінійному закону (див. рис. 2.1). Величина рівнодійної сили дорівнює площі епюри, а лінія дії рівнодійної проходить через центр ваги епюри.

Якщо на рухи твердого тіла накладені обмеження, то таке тіло називається невідільним. Сукупність тіл, які виконують ці обмеження називаються зв'язями.

вають **в'язями** (опорами або закріпленнями). У механіці в'язі розрізняють за типами. Типи в'язей і реакції цих в'язей наведено у табл. 2.1.

Сили реакцій в'язей, накладених на тіло (систему тіл), залежать від їхнього типу:

1. *Гладка поверхня* – поверхня, при визначенні реакції якої силами тертя можна нехтувати. Вектор реакції гладкої поверхні прикладений в точці дотику тіла з поверхнею і направлений по нормалі до поверхні. У разі опори тіла на уступ або вістря, тобто на точкову опору, гладкою вважається поверхня самого тіла, а вектор реакції прямує по нормалі до поверхні тіла.

2. *Шорстка (негладка) поверхня* – поверхня, де за умовою завдання силами тертя нехтувати не можна. Ця реакція є сукупністю двох сил – нормальної реакції поверхні і сили тертя в дотичній площині тіла, убік, протилежний можливому переміщенню тіла по поверхні, і визначається через добуток коефіцієнта тертя ковзання (коефіцієнта зчеплення) на величину сили нормальної реакції поверхні ($F_{\text{тр}} = f \cdot N$). Величина f (коефіцієнта тертя) у наведеній формулі визначається лише при досягненні силою тертя її максимального значення.

3. *Невагомий стержень з ідеальними шарнірами на кінцях* – в'язь, яку ідеалізують у вигляді прямолінійного або криволінійного стержня з шарнірами в точках його кріплення до інших тіл і з вагою, якою в задачі можна нехтувати. В ідеальних шарнірах відсутнє тертя. Реакція стержня позначається вектором, який розташовано на лінії, що з'єднує початок та кінець стержня, оскільки характер дії на стержень зазвичай невідомий, то вектор реакції стержня прийнято направляти від вузла його кріплення до тіла, вважаючи стержень розтягнутим.

4. *Гнучка нитка* (трос, канат, ланцюг, мотузок тощо) – в'язь, яка може працювати лише тоді, коли вона розтягнута. Вектор реакції нитки приймають прикладеним в точці, де нитка прикріплена до тіла, рівновага якого розглядається, і направляють уздовж нитки від тіла.

5. *Шарнірно-рухома опора* – опора, яка дозволяє точці тіла, що пов'язана з опорою, переміщатися без тертя уздовж деякої поверхні. Реакція рухомої опори спрямована по нормалі до поверхні, уздовж якої може переміщатися опора.

6. Шарнірно-нерухома опора або циліндричний шарнір – в’язь, яка не дозволяє точці тіла, що пов’язана з такою опорою, переміщуватись у площині, перпендикулярній осі обертання шарніра, але яка дозволяє тілу за відсутності інших в’язей повертатися щодо цієї осі. Умовно мається на увазі, що в шарнірі відсутнє тертя.

Таблиця 2.1 – Типи в’язей та їхні реакції

Гладка та негладка шорстка поверхні	
Невагомий стержень, гнучка нитка (трос, ланцюг, канат) та шарнірно-рухома опора	
Шарнірно-нерухома опора (циліндричний шарнір) у площині та у просторі	
Шаровий (сферичний) шарнір та підп’ятник	
Жорстке закріплення (защемлення) у площині та у просторі	

Конструктивним виконанням шарнірно-нерухомої опори можуть бути підшипники ковзання, підшипники кочення і просто пальцеві з’єднання. Сила реакції шарнірно-нерухомої опори розташована у площині, перпендикулярній осі обертання шарніра, проходить через його

центр, невідома ні за величиною, ні за напрямком. Тому її компоненти по двох осях в цій площині є величинами, які треба знайти.

7. *Кульова опора або сферичний шарнір* – в'язь, яка не дозволяє точці тіла, що пов'язана з такою опорою, переміщатися в жодному з напрямків, а дозволяє тілу повертатися у певних межах щодо будь-якої з осей, які проходять через цю точку. Реакція опори – сила, невідома за величиною і напрямком у просторі. Її компоненти по осях координат і є величинами, які треба знайти.

8. *Підп'ятник* – в'язь, що є комбінацією циліндричного шарніра і опорної площини. Реакцію підп'ятника, як і у сферичного шарніра, визначають по її складових, направлених уздовж трьох координатних осей.

9. *Жорстке закріплення (защемлення)* – це умовна назва в'язі, що перешкоджає тілу переміщатися в будь-якому напрямі та повертатися навколо будь-якої з осей. Прикладами таких опор є плити підвіконь або балконів, закладені в стіни будинків, кронштейни для кріплення труб, балок і рам, звичайні цвяхи, вбиті у стіну, вкручені шурупи та інше. Невідому силу реакції визначають через її компоненти, а момент невідомої пари сил прийнято називати *моментом закріплення*.

Крім жорсткого, може зустрітися і ковзне закріплення – в'язь, яка не дозволяє закріпленому тілу повертатися відносно точки закріплення, а дозволяє переміщатися лише в одному з напрямків.

Перевірка на статичну визначеність, тобто можливість розв'язку задачі методами статички, полягає в зіставленні кількості невідомих в даній задачі з числом рівнянь рівноваги, які можна скласти для даної системи тіл і сил. Для цієї перевірки необхідно знати число аналітичних умов рівноваги кожної з можливих систем сил, добре уявляти собі, яка система сил діє на кожне з тіл. При вирішенні задач на складені конструкції в процесі такої перевірки вибирають раціональний план розв'язання задачі.

Рівняння рівноваги – це аналітичний запис умов рівноваги конкретної системи тіл, в який вводяться невідомі параметри: реакції в'язей, сили, відстані, кути тощо

Векторні умови рівноваги плоскої системи сил є необхідними й достатніми умовами для рівноваги плоскої довільної системи сил, за якими геометрична сума всіх сил (*головний вектор* сил) дорівнює нулю і алгебраїчна сума моментів всіх сил системи відносно будь якої точки, яка лежить у площині дії сил, також дорівнює нулю, тобто:

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i + \vec{R}_i) = 0, \quad \sum_{j=1}^n [M_o(\vec{F}_i) + M_o(\vec{R}_i)] = 0 \quad (2.1)$$

Векторні умови рівноваги просторової системи сил є необхідними й достатніми умовами для рівноваги просторової довільної системи сил, за якими геометрична сума всіх сил (*головний вектор*) дорівнює нулю і геометрична сума моментів (*головний момент*) всіх сил системи відносно довільної точки також дорівнює нулю, тобто:

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i + \vec{R}_i) = 0, \quad \sum_{j=1}^n [\vec{M}_o(\vec{F}_i) + \vec{M}_o(\vec{R}_i)] = 0. \quad (2.2)$$

Для складання рівнянь рівноваги необхідно вибрати за об'єкт рівноваги тіло або систему тіл, прийняти до розгляду вектори активних сил чи пар сил (моменти) та відповідні в'язям вектори реакцій та пар, визначити проекції сил на осі координат і моменти сил щодо вибраних точок і осей, скласти рівняння рівноваги відповідно до умов (2.1–2.2).

Для проектування векторів сил при складанні рівнянь рівноваги і при визначенні моментів сил доцільно застосовувати таку послідовність:

- ◆ проекція вектора на вісь дорівнює добутку модуля вектора на косинус кута між направленням вектора і позитивним направленням осі;
- ◆ проекція вектора на вісь є скалярною величиною і може бути як позитивною, так і негативною;
- ◆ знак проекції визначається знаком косинуса кута, що утворює направлення вектора і позитивним напрямом осі. Таким чином для гострого кута він позитивний, для тупого – негативний.

На розрахункових схемах, як правило, вибирають гострі кути між лінією дії вектора і віссю (або паралельній осі лінією). Тому знак проекції встановлюють співставленням напрямів проєктованих векторів і осей. Якщо вектор направлено в той же бік, що і вісь, то проєкція вектора позитивна. Інакше – негативна. Якщо проєктується просторовий вектор, то дві його проєкції знаходяться за допомогою подвійного проєктування. При цьому спочатку визначаються проєкції вектора на вісь і перпендикулярну до неї площину, а потім проєкції вектора вже на осі, що лежать у цій площині. Кут між проєкцією вектора на площину і однією з осей площини має бути або відомим, або визначатися з геометрії.

Для визначення моментів сил відносно точок і осей при складанні **рівнянь рівноваги** доцільно застосовувати таку послідовність:

- ◆ моментом сили відносно точки називається добуток модуля сили на її плече;

- ◆ момент сили вважається позитивним, якщо сила прагне обернути тіло відносно точки проти годинникової стрілки, і негативним, якщо за годинниковою стрілкою;

- ◆ момент сили відносно точки дорівнює нулю, якщо лінія дії сили проходить через точку.

Моментом сили відносно осі називають узятий з відповідним знаком добуток проєкції сили на площину, перпендикулярну осі, на плече проєкції відносно точки перетину осі та площини. Момент сили відносно осі дорівнює нулю, коли сила паралельна осі або коли лінія дії сили перетинає вісь, тобто вектор сили і вісь розташовані в одній площині.

Момент сили вважають позитивним, якщо з позитивного напрямку осі видно, що сила прагне обернути тіло проти годинникової стрілки.

Рівняння моментів сил складаються завжди відносно точки, в якій перетинаються лінії дії найбільшого числа невідомих сил. Це або точка кріплення тіла до шарнірно-нерухомої опори, або точка, де балка закладена в стіну.

Складені конструкції – це конструкції, в яких розглядається рівновага системи тіл, зв'язаних одне з одним. На рисунку 2.2 наведено приклади складених конструкцій, створених шляхом з'єднання двох тіл.

Теорема Варіньона стверджує, що момент рівнодійної системи сил відносно будь-якої точки (або осі) є рівним сумі моментів сил системи відносно цієї ж точки (цієї осі). Застосовують цю теорему так: силу розкладають на складові по координатних осях і визначають момент сили як суму алгебраїчних моментів її складових.

З'єднання тіл між собою мають два основних варіанти:

- ♦ одне з тіл в системі вільно спирається на інше тіло і у цьому варіанті спрямування сил взаємодії (внутрішні сили реакцій в'язей між тілами) відомі, бо сили взаємодії направлені по нормалі або до поверхні, на яку спираються, або якою спираються, або до обох разом;

- ♦ тіла з'єднуються між собою шарніром. У цьому випадку спрямування сили, що діє в шарнірі з боку одного тіла на інше, невідоме ні за величиною, ні за спрямуванням.

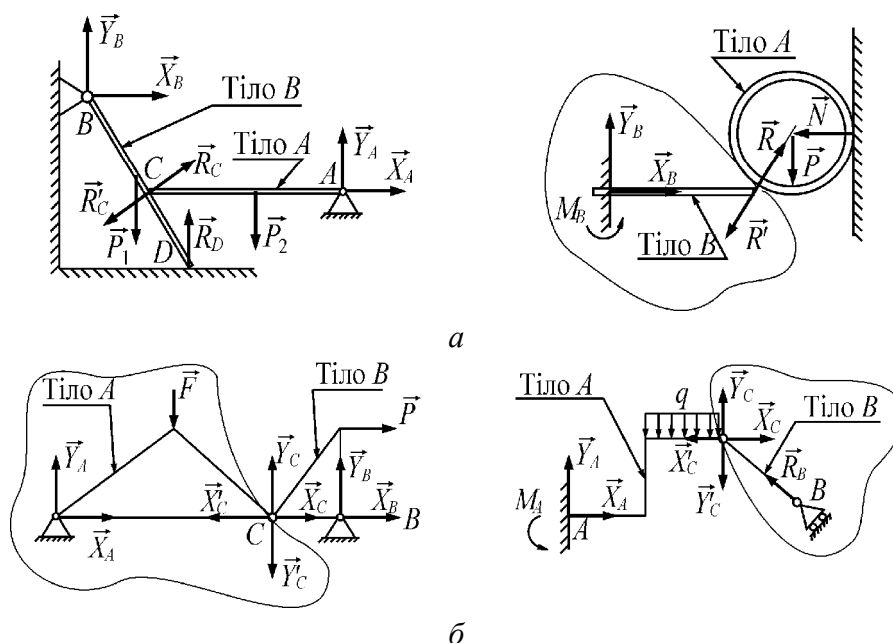


Рисунок 2.2 – Приклади складених тіл: а – одне з тіл в системі вільно спирається на інше тіло; б – тіла з'єднуються між собою шарніром

Схеми розв'язання задач для плоских складених конструкцій:

- ♦ складають розрахункові схеми для сил, що діють на кожне з тіл. Для кожного з тіл записуються рівняння рівноваги і з шести рів-

нянь знаходяться всі невідомі величини. Рівняння рівноваги для окремих частин конструкції складати простіше, ніж для всієї конструкції;

◆ складають розрахункову схему для всієї конструкції і розрахункову схему для тіла, на яке діє простіша система сил. Рівняння рівноваги записують для даного тіла і для всієї конструкції. При складанні рівнянь рівноваги для всієї конструкції систему внутрішніх сил в шарнірі як систему взаємно урівноважених сил просто не враховують.

2.2. Визначення реакцій за умов дії плоскої системи сил

Необхідно визначити сили реакцій для розрахункової схеми, наведеної на рис. 2.3 а, при таких вихідних даних:

$$F = 15 \text{ кН}, \quad q = 10 \text{ кН/м}, \quad M = 10 \text{ кНм}, \\ a = 6 \text{ м}, \quad b = 4 \text{ м}, \quad c = 2 \text{ м}, \quad \alpha = 120^\circ, \quad \beta = 30^\circ.$$

Розв'язання проведемо за такою схемою.

1. Об'єктом рівноваги є ламаний стержень, на який діють: зосереджена сила \vec{F} , пара сил із моментом M та розподілена сила інтенсивністю q .

2. Введемо систему координат xAy (рис. 2.3 б).

3. У точці A на стержень накладено шарнірно-нерухому в'язь, у точці B – шарнірно-рухому.

4. Шарнірно-нерухому в'язь замінимо двома складовими силами \vec{X}_A, \vec{Y}_A , шарнірно-рухому – силою \vec{R}_B , приймаючи, що $\gamma = 90^\circ - \beta = 60^\circ$ (див. рис. 2.3 б).

5. Розподілену силу замінимо зосередженою силою \vec{Q} (див. рис. 2.3 б), модуль якої $Q = q \cdot b = 10 \cdot 4 = 40 \text{ кН}$, точка прикладання її розташована у середині відрізка дії вихідної розподіленої сили.

6. Сили $\vec{F}, \vec{Q}, \vec{R}_B$ в обраній системі координат є нахиленими до осей, тому замінюємо їх відповідними складовими (рис. 2.3 в):

$$F_x = F \cdot \cos(180^\circ - \alpha); \quad F_y = F \cdot \sin(180^\circ - \alpha);$$

$$Q_x = Q \cos \delta; Q_y = Q \sin \delta; R_{Bx} = R_B \cos \gamma; R_{By} = R_B \sin \gamma;$$

$$\cos \delta = \frac{\sqrt{b^2 - (b/2)^2}}{b} \approx 0,866, \sin \delta = \frac{b/2}{b} = 0,5.$$

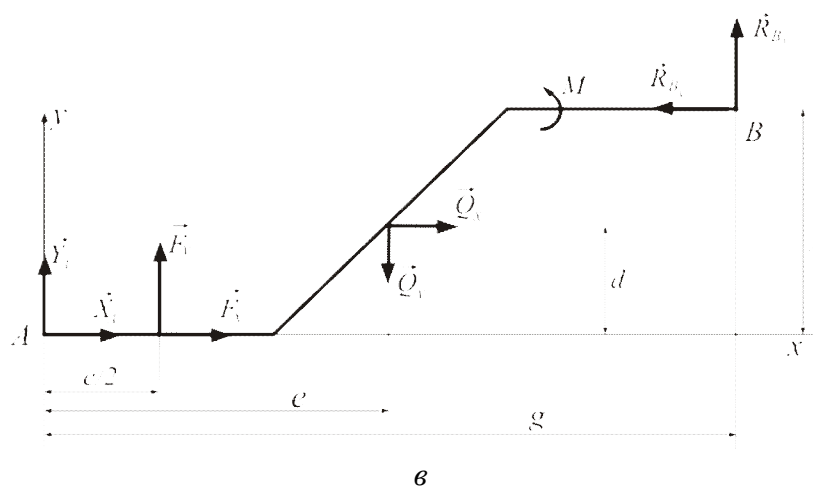
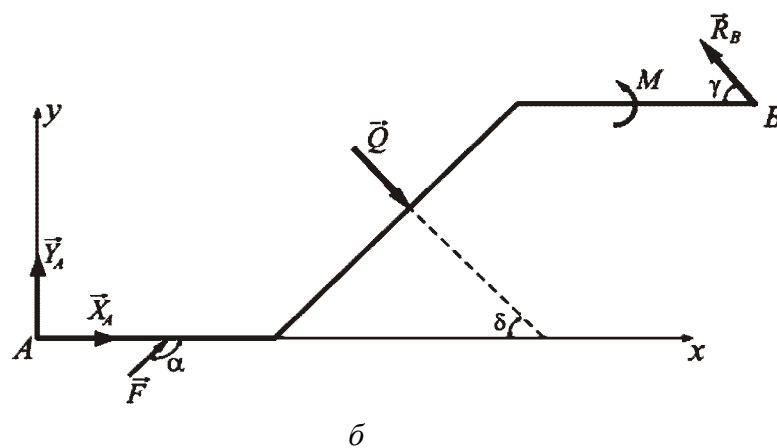
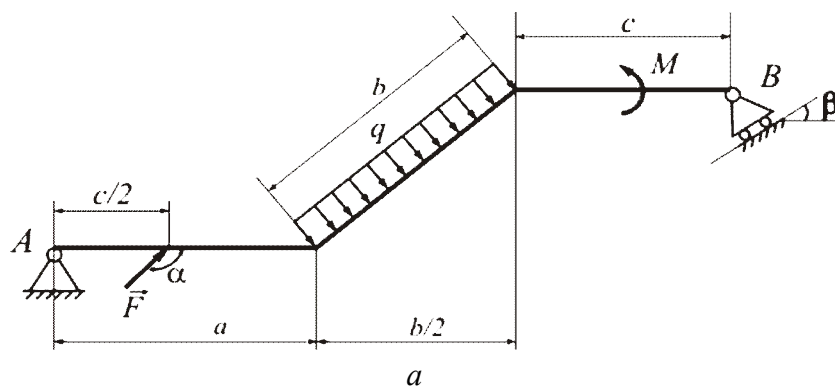


Рисунок 2.3 – Розрахункова схема для визначення реакцій
при дії плоскої системи сил: *a* – вихідна система, *б* – система із відкинутими
опорами, *в* – система із відкинутими опорами та розкладеними силами

7) Складемо систему рівнянь рівноваги:

$$\begin{cases} X_A + F_x + Q_x - R_{Bx} = 0; \\ Y_A + F_y - Q_y + R_{By} = 0; \\ F_y \cdot (c/2) - Q_y \cdot e - Q_x \cdot d + R_{Bx} \cdot f + R_{By} \cdot g + M = 0, \end{cases}$$

де перші два рівняння – це суми проекцій активних сил і сил реакцій на координатні осі, а третє рівняння – сума алгебраїчних значень моментів сил відносно точки A и пари сил із моментом M .

Враховуючи, що

$$\begin{aligned} e &= a + 0,5b \sin \delta = 7 \text{ м}, & d &= 0,5b \cos \delta \approx 1,74 \text{ м}, \\ f &= b \cos \delta \approx 3,48 \text{ м}, & g &= a + 0,5b + c = 10 \text{ м}, \\ \alpha &= 120^\circ; \cos(180^\circ - 120^\circ) = 0,5; \sin(180^\circ - 120^\circ) \approx 0,866. \end{aligned}$$

Обчислимо:

$$\begin{cases} X_A + 7,5 + 34,8 - 0,5R_B = 0; & X_A \approx -33,8 \text{ кН}; \\ Y_A + 13 - 20 + 0,87R_B = 0; & Y_A \approx -7,79 \text{ кН}; \\ 13 - 140 - 60,55 + 10,44 \cdot R_B + 10 = 0; & R_B \approx 17 \text{ кН}; \end{cases}$$

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} \approx 34,9 \text{ кН}.$$

Знак «мінус» перед значеннями сил X_A и Y_A свідчить про те, що дійсне спрямування їх дії протилежно зображеному на рис. 2.3 б.

8) Перевірку розв'язку виконаємо, підрахувавши суму алгебраїчних значень моментів сил і пар сил відносно точки B :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^8 m_B(\vec{F}_i) + M &= Q_x(f - d) + Q_y(g - e) - F_y(g - c/2) + F_x \cdot f + \\ &+ X_A \cdot f - Y_A \cdot g + M = -0,07. \end{aligned}$$

У даній сумі враховано, що сили \vec{R}_{Bx} та \vec{R}_{By} прикладені у точці B , тому відносно неї вони не створюють моменту. Тепер оцінимо точність розв'язку:

$$\left| \sum \langle + \rangle \right| = 234,55; \quad \left| \sum \langle - \rangle \right| = 234,62; \quad |\varepsilon| = \frac{0.07}{234.55} \cdot 100\% = 0,03 \%$$

Величина похибки задовільна, тому можна зробити висновок, що приклад розв'язано правильно.

Далі розглянемо розв'язок цієї задачі засобами ПК КіДиМ, для чого складемо відповідний файл вихідних даних.

Текст файлу

```
РАБОТА:=№1.1;
ВЫПОЛНИЛ:=Иванов П.С., гр. I-17а;
# Запис рівнянь рівноваги #
P.x=XA+Q*sqrt(b^2-(b/2)^2)/b-F*cos(alfa)-RB*cos(gamma);
P.y=YA+F*sin(alfa)-Q*0.5+RB*sin(gamma);
P.fiz=M+F*c*sin(alfa)/2-Q*0.5*e-Q*sqrt(b^2-(b/2)^2)/b*d+RB*cos(gamma)*f+RB*sin(gamma)*g1;

# Вихідні дані та необхідні розрахунки #
F=15; M=10; q=10; a=6; b=4; c=2; gamma=PI/3;
e=a+b*0.25; d=b*sqrt(b^2-(b/2)^2)/b/2; Q=b*q;
f=b*sqrt(b^2-(b/2)^2)/b; g1=a+b/2+c;
RA=sqrt(XA^2+YA^2);

# Інструкції для розв'язку та представлення результатів #
НЕИЗВЕСТНЫЕ:=XA,YA,RB;
ВАРЬИРОВАТЬ:=alfaG(0,360); alfa=alfa°*PI/180;
ПОКАЗАТЬ:=RA;
РАСЧЕТ:=СТАТИКА;
КОНЕЦ;
```

Результатом розв'язку є графіки залежності реакцій від кута нахилу сили \vec{F} . Якщо кінцевим значенням кута нахилу взяти 120° , то можна легко порівняти результати аналітичного та комп'ютерного розв'язків. Наприклад, на рис. 2.4 наведено графік залежності реакції X_A від кута нахилу сили \vec{F} , який змінюється в діапазоні $[0, 120^\circ]$.

Також за допомогою постпроцесора ПК КіДиМ можна проводити аналіз розподілу реакцій залежно від кута нахилу сили \vec{F} . Нехай кут α

змінюється у діапазоні $[0^\circ, 360^\circ]$, тобто вектор сили опише повне коло. Подібний аналіз допоможе виявити такі умови прикладання зовнішнього навантаження (сили \vec{F}), за яких опори будуть навантажені найбільше та найменше.

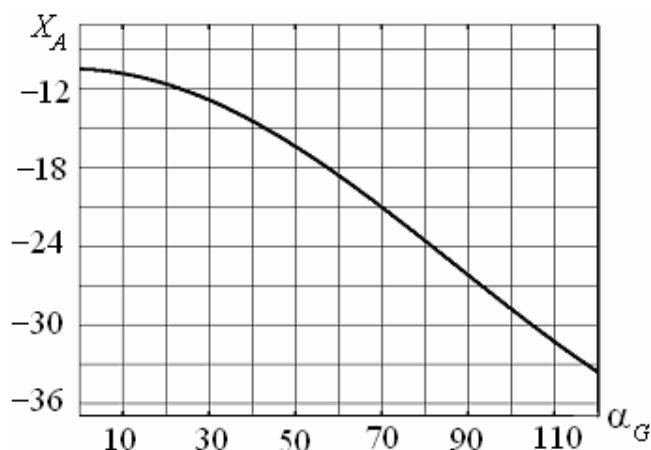


Рисунок 2.4 – Графік залежності горизонтальної складової реакції шарніра A від кута нахилу сили \vec{F} у діапазоні $[0, 120^\circ]$

На рис. 2.5–2.7 наведено графіки залежностей реакцій від кута нахилу сили \vec{F} . З графіка для горизонтальної складової реакції у шарнірі A (див. рис. 2.5) видно, що абсолютне максимальне значення фіксується, коли сила \vec{F} є майже горизонтальною та спрямованою праворуч ($\alpha \approx 177,5^\circ$), деяке відхилення від горизонталі обумовлене наявністю нахиленої розподіленої сили. Мінімуми (за абсолютним значенням) спостерігають, коли сила \vec{F} є горизонтальною та спрямованою ліворуч (α дорівнює 0° та 360°). Максимуми вертикальної реакції нерухомого шарніру (див. рис. 2.6) спостерігають, якщо сила \vec{F} є також вертикальною (α дорівнює 90° та 270°), причому абсолютний максимум досягається, якщо сила \vec{F} спрямована донизу ($\alpha = 270^\circ$). Це обумовлено наявністю нахиленої розподіленої сили (вона спрямована праворуч та донизу). Графік на рис. 2.7 відображує залежність модуля повної реакції нерухомого шарніра від кута нахилу сили \vec{F} . Цей графік має яскраво виражений максимум, причому значення відповідного кута нахилу $\alpha \approx 183^\circ$ відрізняється від тих, які відповідають максимумам горизонтальної та вертикальної складових. Це свідчить про те, що обидві скла-

дові впливають на величину повної реакції, проте в даному прикладі горизонтальна складова впливає на повну реакцію у більшій мірі. Так само й мінімуми повної реакції спостерігають практично при тих самих кутах нахилу, що і мінімуми горизонтальної складової.

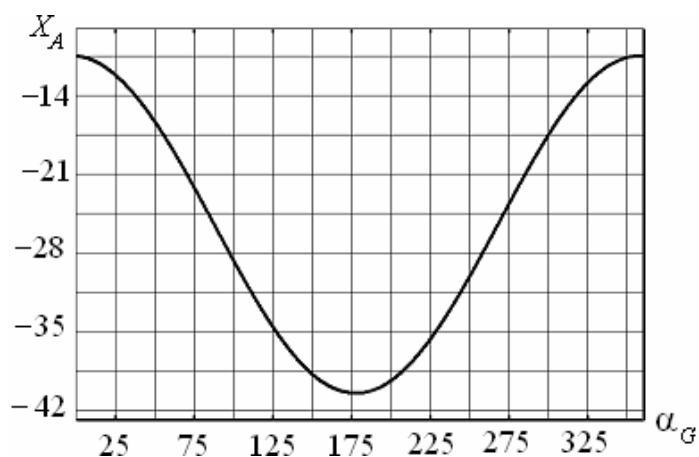


Рисунок 2.5 – Графік залежності горизонтальної складової реакції шарніра A від кута нахилу сили \vec{F}

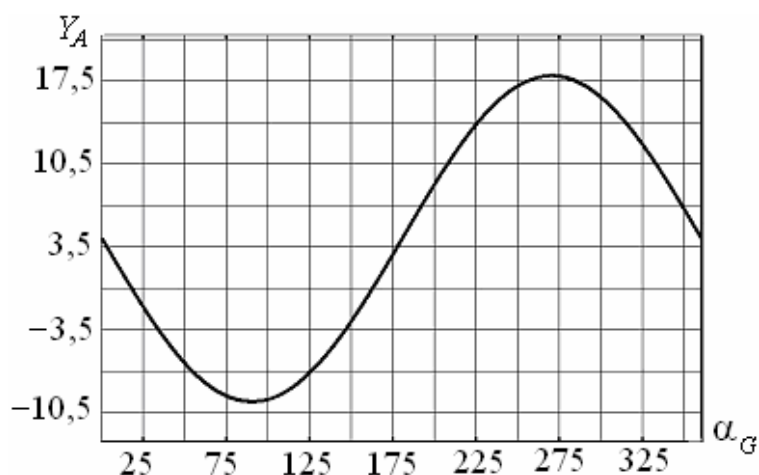


Рисунок 2.6 – Графік залежності вертикальної складової реакції шарніра A від кута нахилу сили \vec{F}

Значення реакції рухомого шарніра B незалежно від кута нахилу сили \vec{F} є позитивним. Згідно з графіком на рис. 2.8 можна казати про яскраво виражений мінімум ($\alpha = 90^\circ$ – сила \vec{F} спрямована вертикально догори) та максимум ($\alpha = 270^\circ$ – сила \vec{F} спрямована вертикально донизу). Слід зазначити: якщо метою подібних розрахунків є виявлення умов, за яких опори будуть навантажені найменше, то необхідно обирати кут нахилу α в діапазоні від 25° до 100° , бо в цьому діапазоні

спостерігаються мінімальні значення реакцій нерухомого та рухомого шарнірів одночасно.

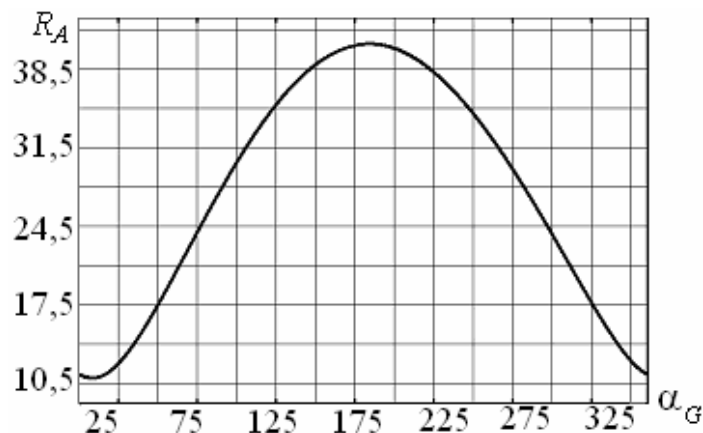


Рисунок 2.7 – Графік залежності модуля повної реакції шарніра А від кута нахилу сили \vec{F}

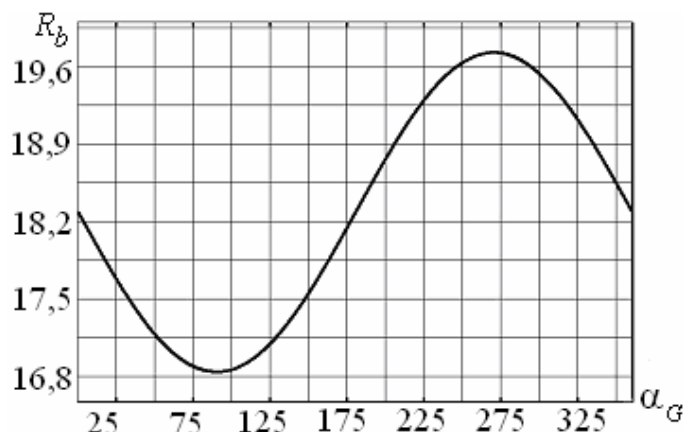
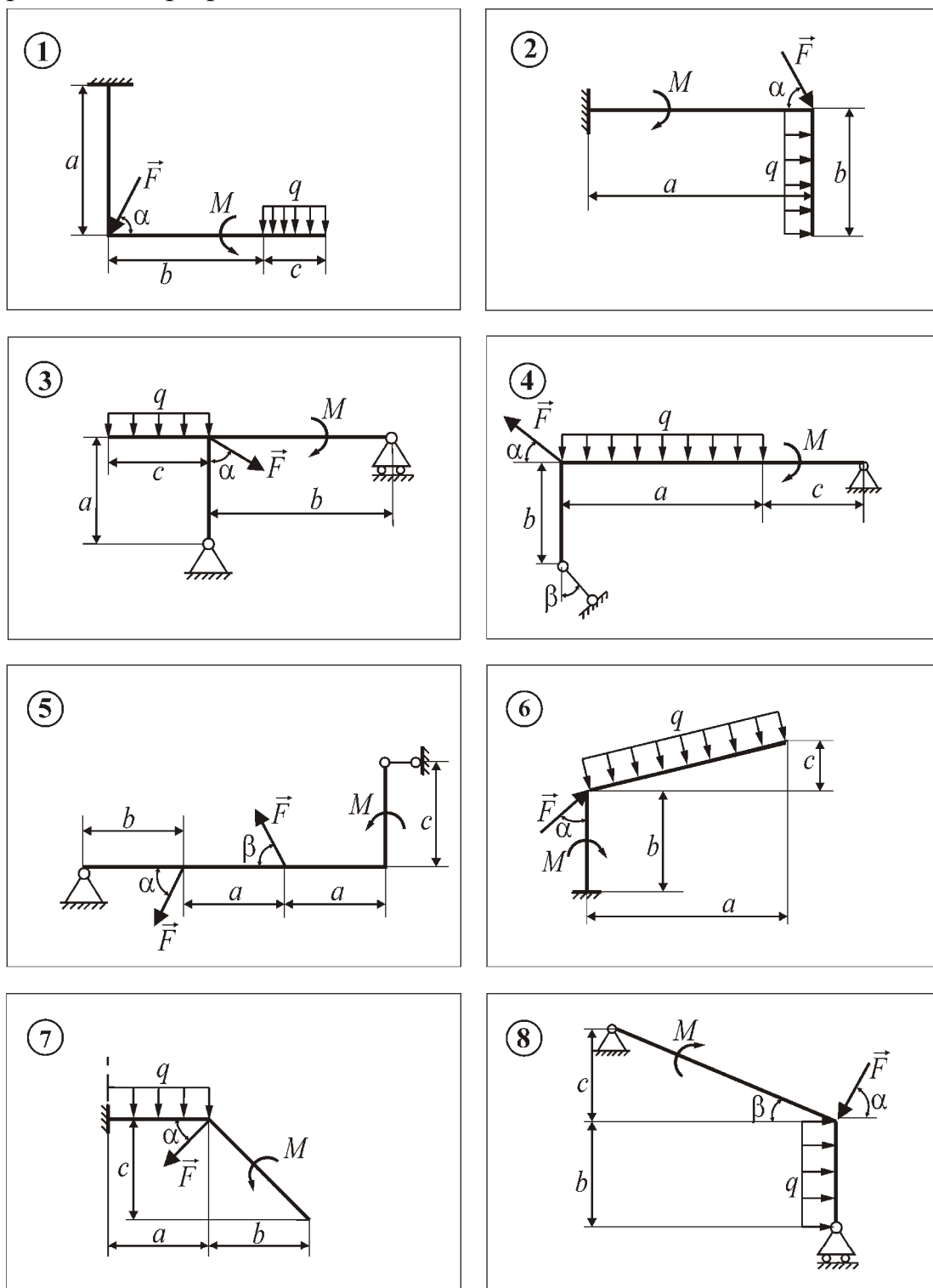


Рисунок 2.8 – Графік залежності реакції рухомого шарніра В від кута нахилу сили \vec{F}

2.2.1. Завдання для самостійної роботи. У табл. 2.2 та 2.3 запропоновано варіанти розрахункових схем та вихідні дані, згідно з якими необхідно визначити реакції опор при дії плоскої системи сил.

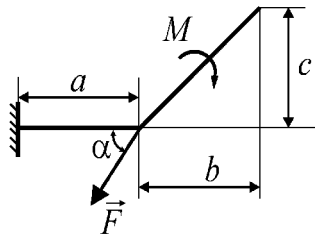
Розв'язок необхідно провести у два етапи: спочатку визначити реакції аналітично, для заданого значення кута нахилу зосередженої сили α (див. табл. 2.3). Після цього необхідно провести дослідження розподілу реакцій залежно від кута α . Це дослідження необхідно проводити засобами ПК КіДиМ, користуючись наведеним текстом файлу вихідних даних. Графіки залежності реакцій необхідно побудувати в діапазоні $[0, 360^\circ]$.

Таблиця 2.2 – Варіанти розрахункових схем для визначення реакцій опор при дії плоскої системи сил

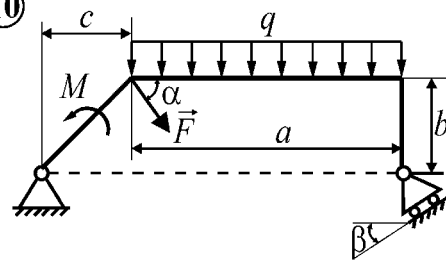


Продовження табл. 2.2

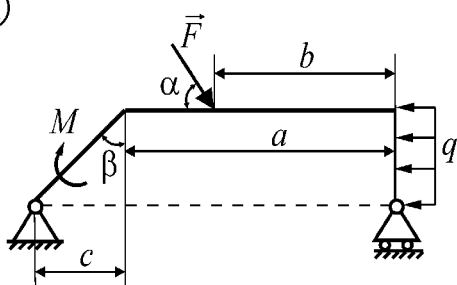
9



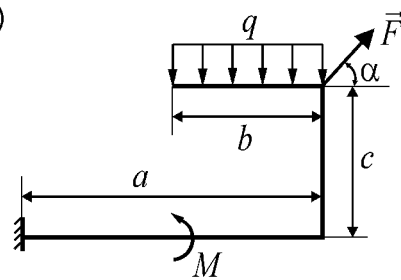
10



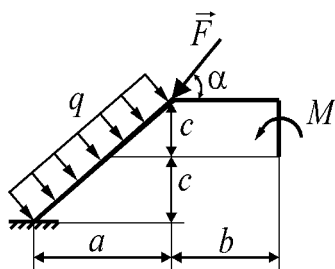
11



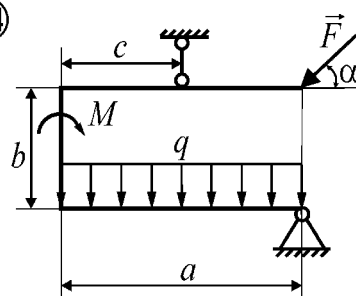
12



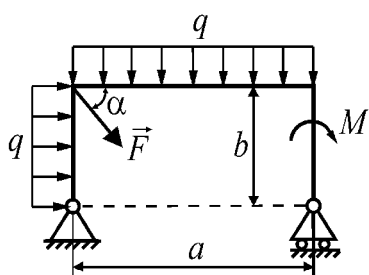
13



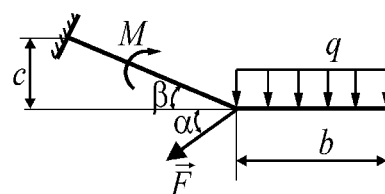
14



15

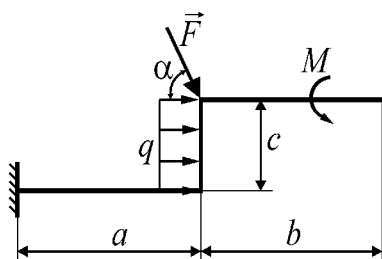


16

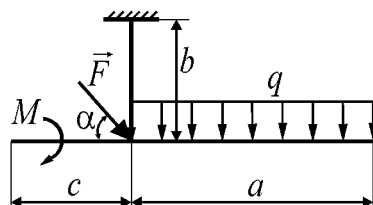


Продовження табл. 2.2

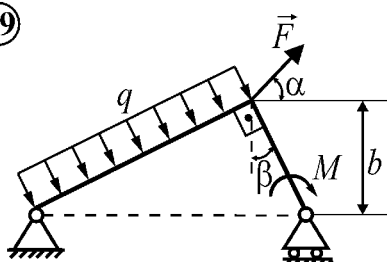
17



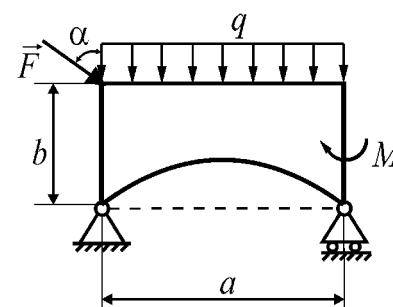
18



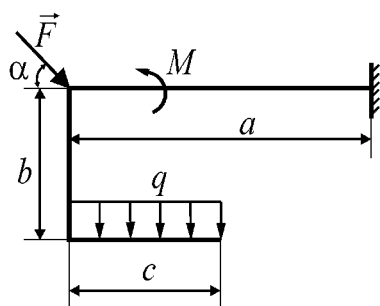
19



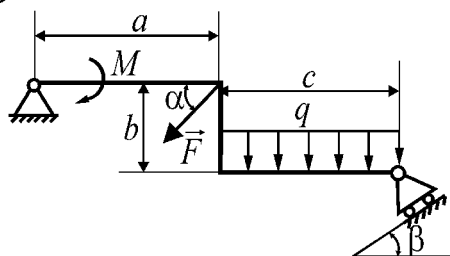
20



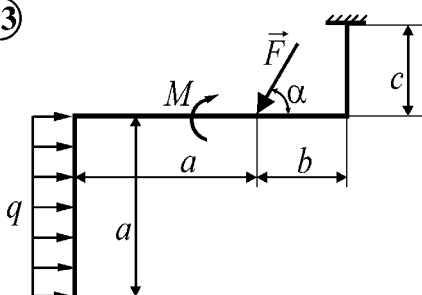
21



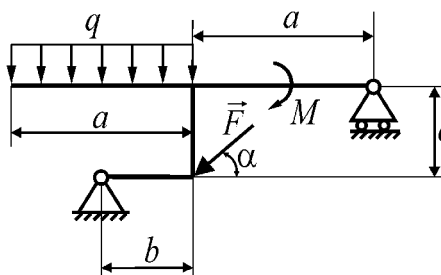
22



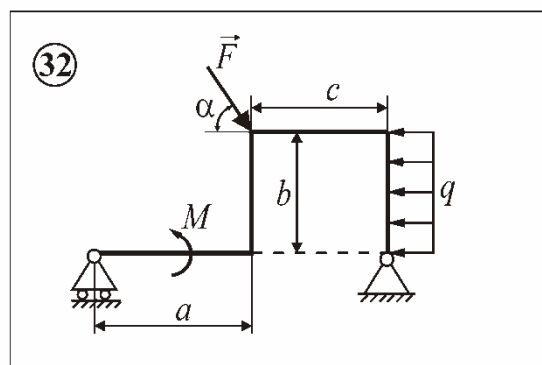
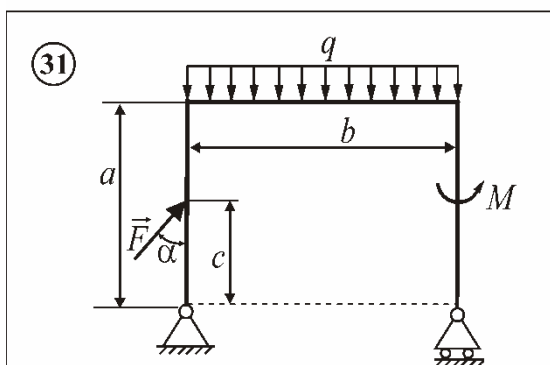
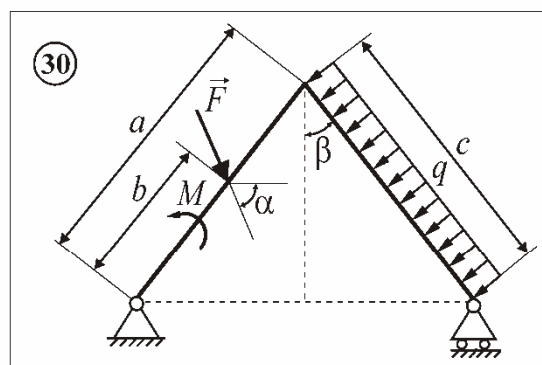
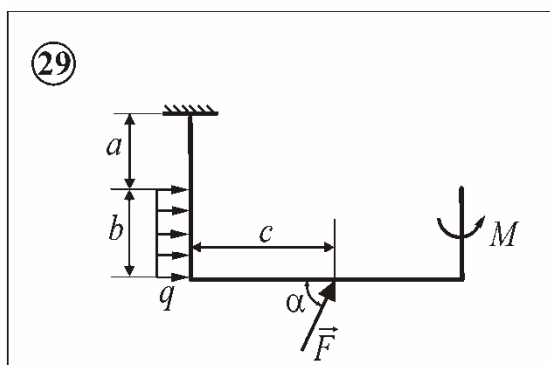
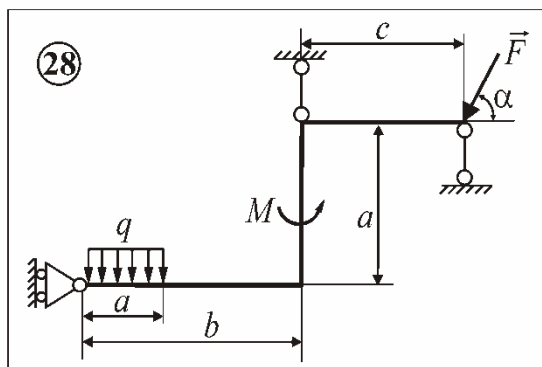
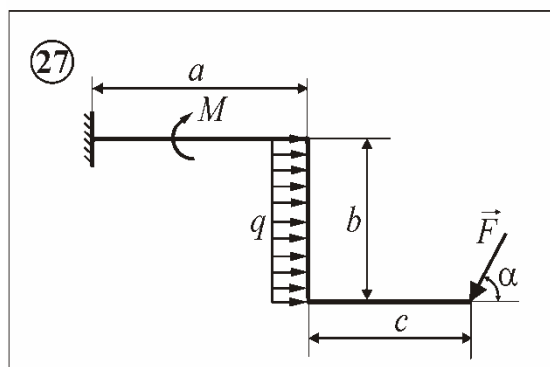
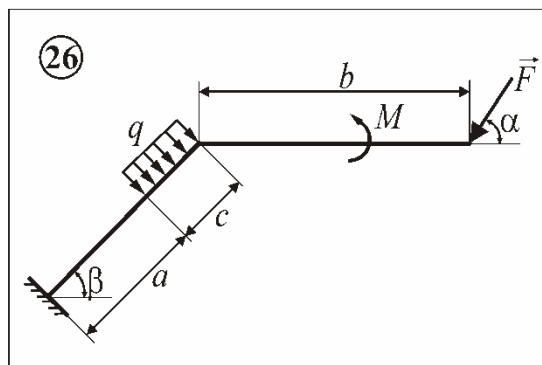
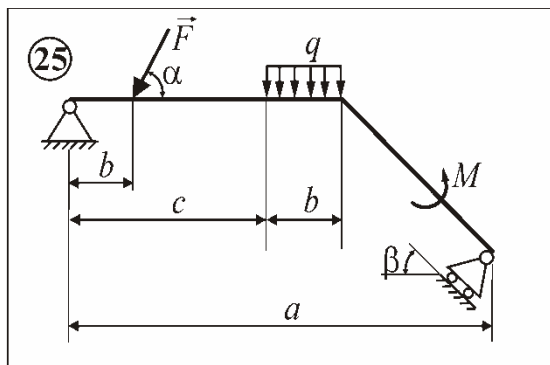
23



24



Продовження табл. 2.2



Таблиця 2.3 – Вихідні дані для визначення реакцій опор при дії плоскої системи сил

Номер варіанта	F , Н	M , Н·м	q , Н/м	a , м	b , м	c , м	α , град	β , град
1	10	5	2	0,7	0,5	0,1	45	—
2	15	10	20	1	0,8	0,6	60	—
3	12	12	4	10	5	2,5	45	—
4	20	4	12	7	4	3	30	45
5	100	50	—	2	1	0,6	30	60
6	200	25	80	4	3	2	45	—
7	90	63	12	10	8	6	60	—
8	20	10	5	—	12	6	90	45
9	12	11	—	2	1	0,9	30	—
10	200	100	10	10	4	3	45	45
11	250	150	50	20	10	4	30	60
12	15	14	13	15	5	2	45	—
13	10	12	14	10	8	2	30	—
14	33	22	11	15	7,5	4	60	—
15	10	12	2	10	7	—	30	—
16	8	7	6	—	12	6	45	60
17	34	24	14	12	6	3	30	—
18	5	2	0,1	20	10	5	30	—
19	100	50	12	—	10	—	45	30
20	70	50	20	0,7	0,35	—	60	—
21	300	100	50	3	2	1	45	—
22	44	54	64	5	3	0,8	45	60
23	12	11	9	20	10	5	30	—
24	20	10	15	12	11	10	30	—
25	15	12	10	22	5	7	60	30
26	9	10	12	3	7	1	45	30
27	22	44	11	5	4	3	60	—
28	10	10	10	10	9	8	30	—
29	10	12	3	10	10	15	30	—
30	2	1	0,3	30	12	30	45	60
31	31	41	11	12	15	6	60	—
32	22	22	22	2	1	0,3	45	—

2.3. Визначення реакцій складеної конструкції при дії плоскої системи сил

Необхідно визначити сили реакцій для розрахункової схеми, наведеної на рис. 2.9 а, при таких вихідних даних:

$$F = 10 \text{ кН}; q = 10 \text{ кН/м}; M = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}; a = 4 \text{ м}; b = 3 \text{ м}; c = 1,5 \text{ м}; \alpha = 60^\circ.$$

Розв'язок проведемо за наступною схемою:

1. Об'єктом рівноваги є система двох стержнів, з'єднаних у точці C шарніром. Система навантажена зосередженою силою \vec{F} , парою сил із моментом M та розподіленою силою інтенсивністю q .

2. Обираємо систему координат xAy .

3. У точці A система закріплена за допомогою жорсткого закріплення, у точці B – за допомогою шарнірно-рухомої опори.

4. Жорстке закріплення замінимо двома складовими: \vec{X}_A, \vec{Y}_A , шарнірно-рухому – силою \vec{R}_B , спрямованою по горизонталі (рис. 2.9 б).

5. Розподілену силу замінимо зосередженою силою \vec{Q} (див. рис. 2.9 б), модуль якої $Q = q \cdot c = 10 \cdot 1,5 = 15 \text{ кН}$, точка прикладання її розташована у середині відрізка дії вихідної розподіленої сили.

6. Сила \vec{F} у обраній системі координат є нахиленою до осей, тому замінюємо її відповідними складовими: \vec{F}_x и \vec{F}_y (див. рис. 2.9 б):

$$F_x = F \cos \gamma, F_y = F \sin \gamma, \gamma = \alpha - 30^\circ;$$

7. Розділяємо конструкцію на два окремі ламані стержні, замінюючи відкинуті частини силами \vec{X}_C, \vec{Y}_C , спрямованими так, як показано на рис. 2.9 в.

8. Складаємо рівняння рівноваги окремо для лівої частини (див. рис. 2.9 в):

$$\begin{cases} X_A + X_C = 0; \\ Y_A - Q + Y_C = 0; \\ M_A - M + Q \cdot 0,5c + Y_C \cdot b - X_C \cdot a = 0, \end{cases}$$

окремо для правої частини (див. рис. 2.9 в):

$$\begin{cases} -X_C - R_B + F_x = 0; \\ -Y_C - F_y = 0; \\ -F_y \cdot d - F_x \cdot e + R_B \cdot f = 0, \end{cases}$$

тут $d = b \cdot \cos 30^\circ$; $e = b \cdot \sin 30^\circ$; $f = (b + c) \cdot \sin 30^\circ$.

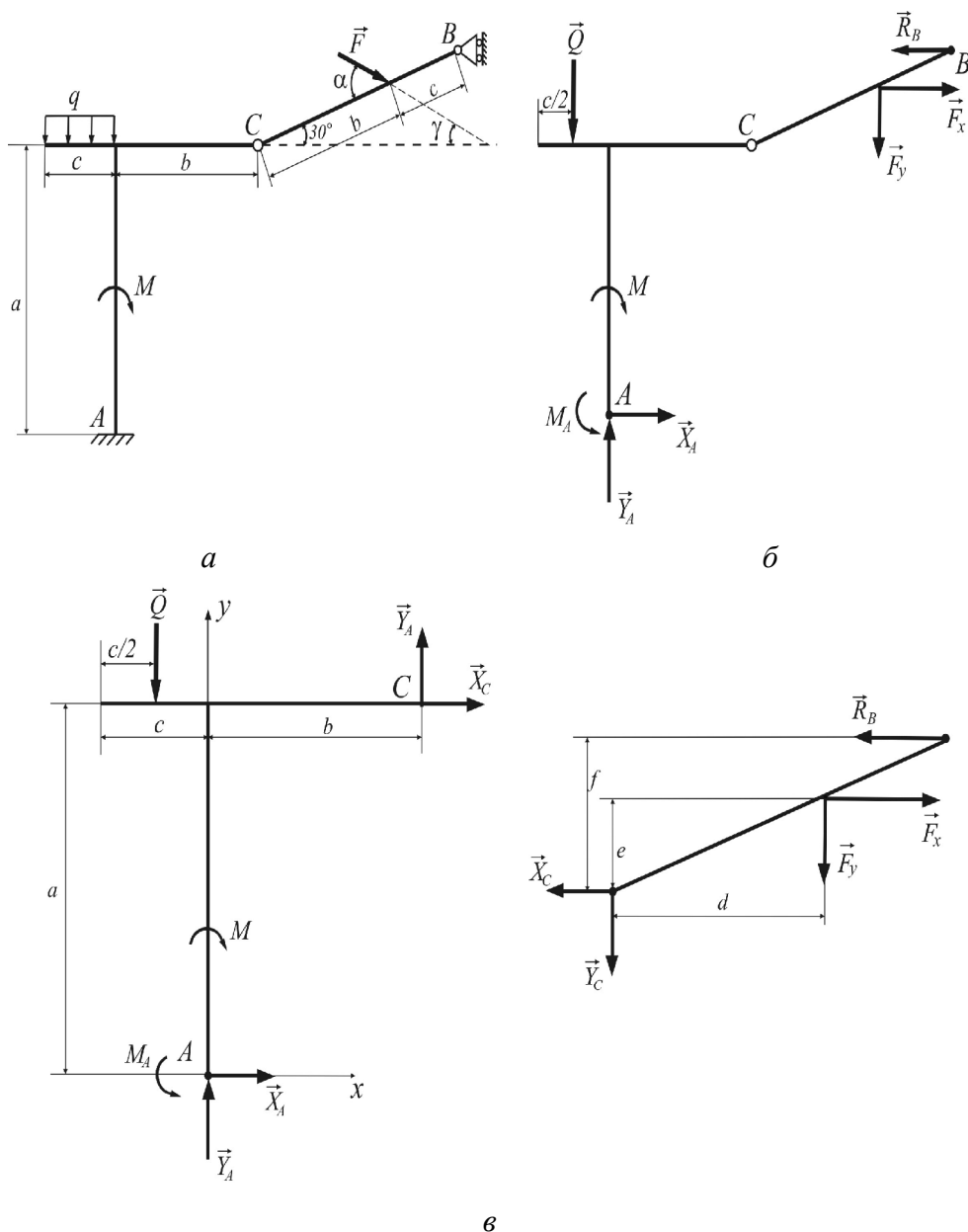


Рисунок 2.9 – Розрахункова схема для визначення реакцій опор складеної конструкції: а – вихідна схема; б – звільнена система з перетвореними силами; в – розділена по шарніру система

Розв'язуючи ці дві системи рівнянь разом, одержуємо такі результати:

$$X_A \approx 2,89 \text{ кН}; Y_A = -20 \text{ кН}; M_A \approx 2,2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$R_B \approx 11,55 \text{ кН}; X_C \approx -2,89 \text{ кН}; Y_C = -5 \text{ кН}.$$

По одержаних результатах можна визначити величини повної реактивної сили у закріпленні A та сили, яка виникає у з'єднувальному шарнірі C :

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} \approx 20,21 \text{ кН}; \quad R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} \approx 5,78 \text{ кН}.$$

Далі розглянемо розв'язок цієї задачі засобами ПК КіДиМ.

Текст файлу

РАБОТА:=№1.2;

ВЫПОЛНИЛ:= студент Иванов А.А., Гр. I-10а;

Запис рівнянь рівноваги

P.x1=Xa+Xc;

P.y1=Ya-Q+Yc;

P.fi1=Ma-M+Q*c/2+Yc*b-Xc*a;

P.x2=-Xc-Rb+F*cos(alfa-gamma);

P.y2=-Yc-F*sin(alfa-gamma);

P.fi2=-F*sin(alfa-gamma)*b*cos(PI/6)-

F*cos(alfa-gamma)*b*sin(PI/6)+Rb*(b+c)*sin(PI/6);

Вихідні дані та необхідні розрахунки

gamma=PI/6; Q=q*c;

F=10; q=10; M=10; a=4; b=3; c=1.5;

Ra=sqrt(Xa^2+Ya^2); Rc=sqrt(Xc^2+Yc^2);

Re1=abs((Rc-Ra)*100/Ra);

Re2=abs((Rc-Rb)*100/Rc);

#Інструкції для розв'язку та представлення результатів#

НЕИЗВЕСТНЫЕ:= Xa,Ya,Rb,Ma,Xc,Yc;

alfa=alfaG*PI/180;

ВАРЬИРОВАТЬ:= alfaG(0,360);

ПЕЧАТАТЬ:=Ra,Rc,Re1,Re2;

РАСЧЕТ:= СТАТИКА;

КОНЕЦ;

У тексті файлу вихідних даних крім невідомих реакцій додані параметри $Re_1 = \left| \frac{R_C - R_A}{R_A} \cdot 100\% \right|$ та $Re_2 = \left| \frac{R_C - R_B}{R_B} \cdot 100\% \right|$, які дозволяють порівнювати завантаженість закріплень A та B із завантаженістю з'єднувального шарніра C . Результатом розв'язку є графіки залежності реакцій від кута нахилу сили \vec{F} , які наведено на рис. 2.10–2.12.

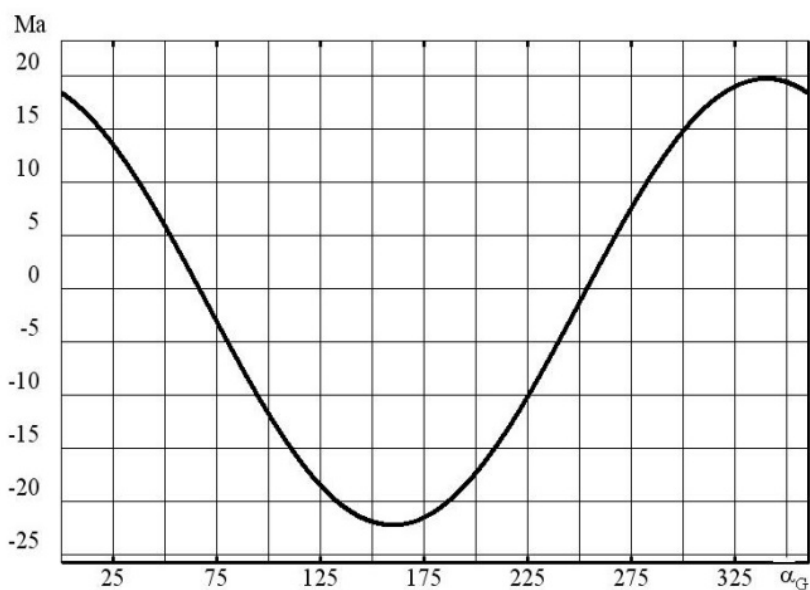


Рисунок 2.10 – Графік залежності реактивного моменту

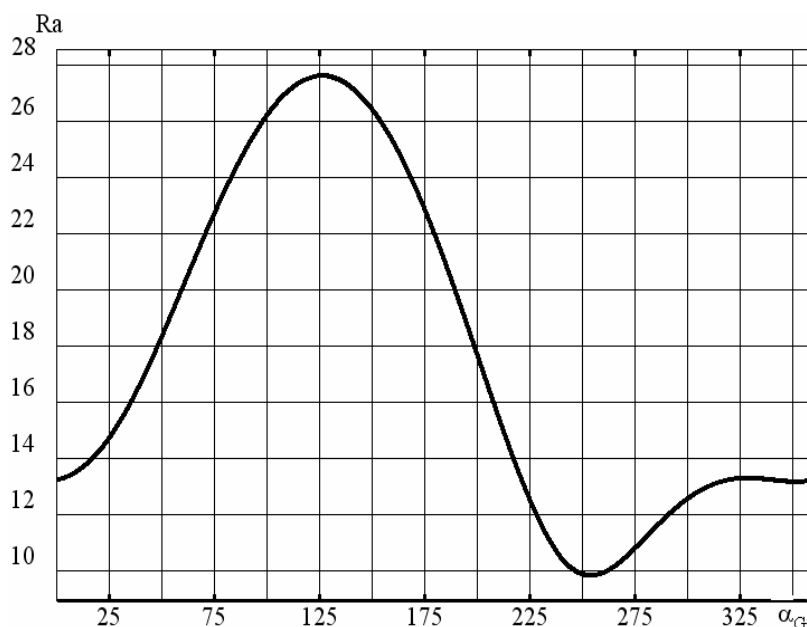


Рисунок 2.11 – Графік залежності реактивної сили у жорсткому закріпленні

Якщо проаналізувати одержані результати, то, зокрема, можна з'ясувати умови, за яких з'єднувальний шарнір буде навантажений найменше. Згідно з результатами представленими на графіку (див. рис. 2.12), ці умови будуть виконуватись, якщо кут нахилу сили \vec{F} дорівнює приблизно 40 або 220°.

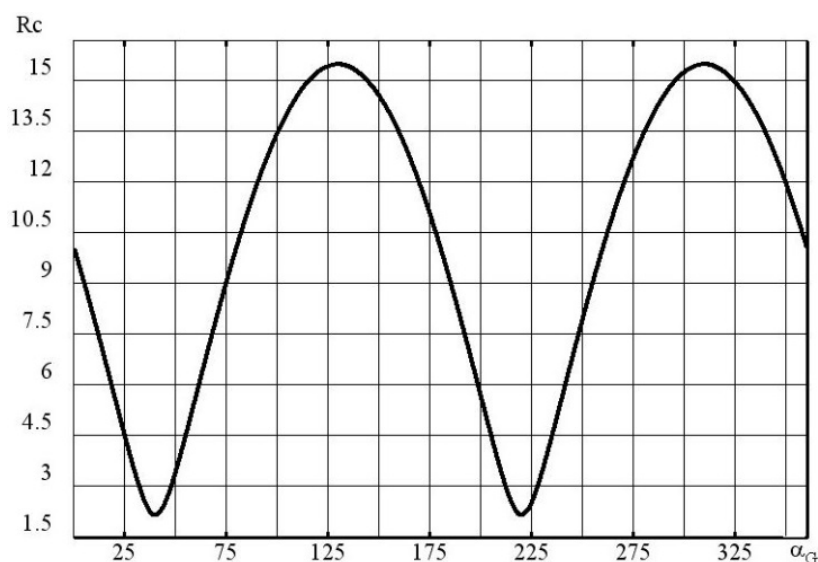
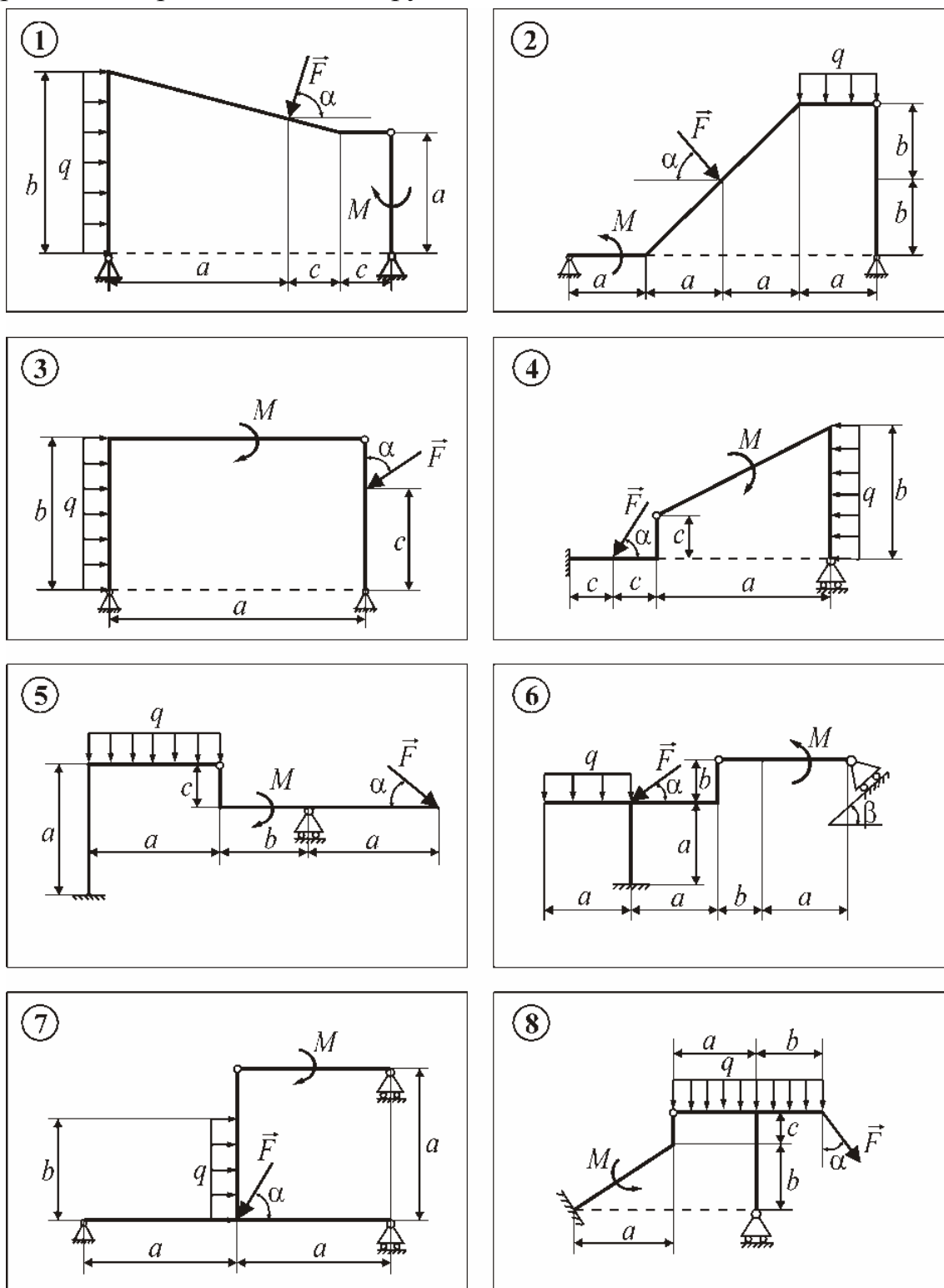


Рисунок 2.12 – Графік залежності реакції у з'єднувальному шарнірі

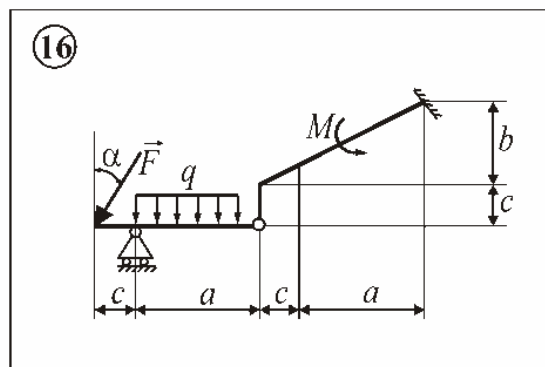
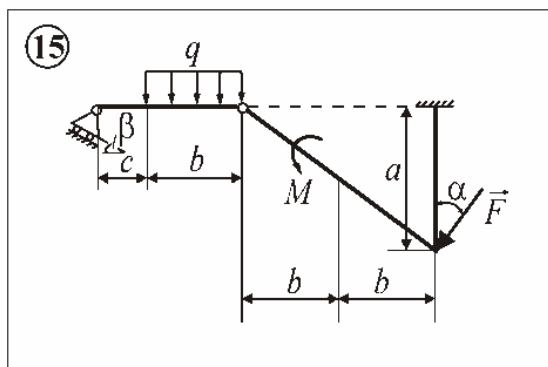
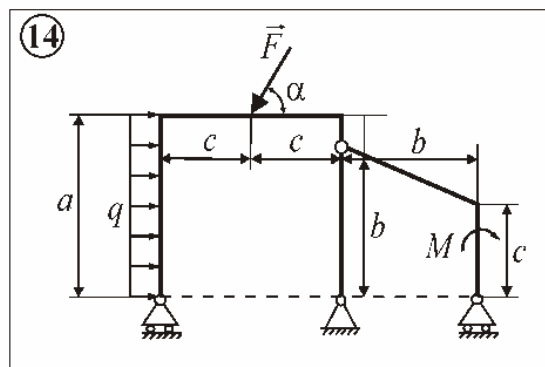
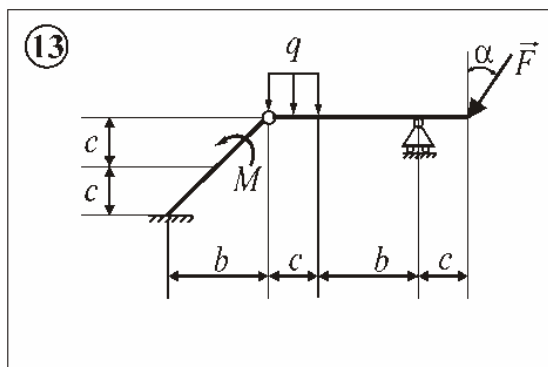
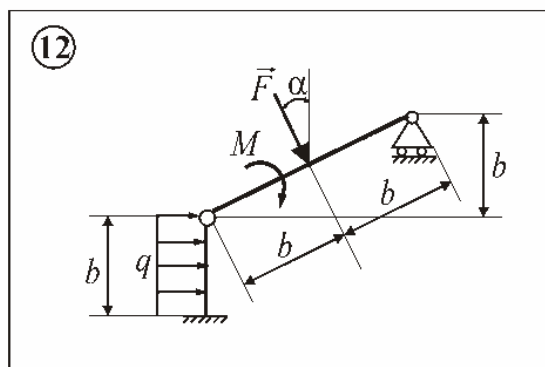
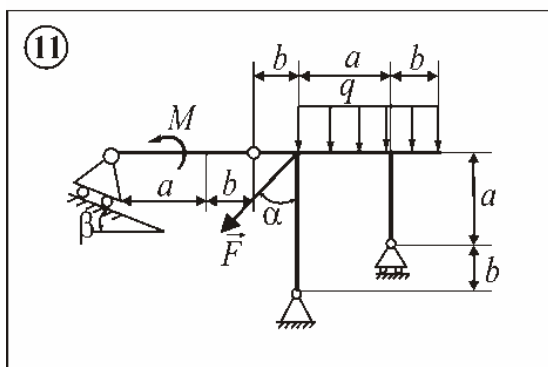
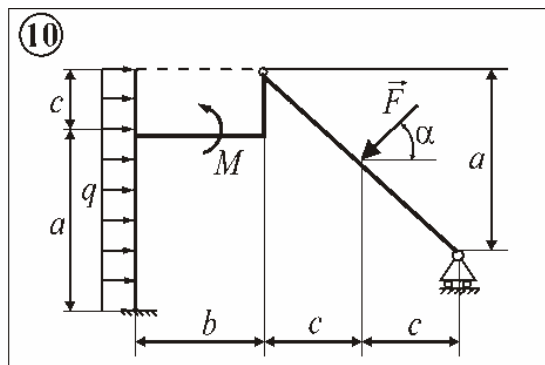
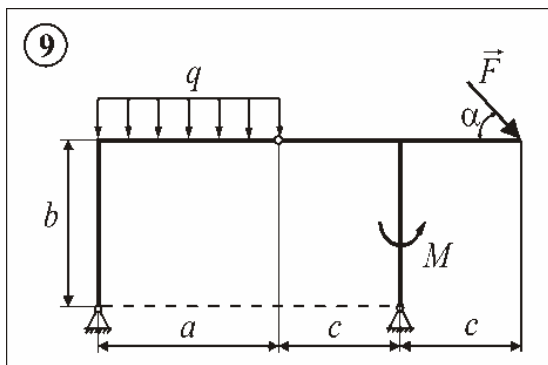
2.3.1. Завдання для самостійної роботи. У табл. 2.4 і 2.5 запропоновано варіанти розрахункових схем та вихідні дані, згідно з якими необхідно визначити реакції опор складеної конструкції при дії плоскої системи сил.

Розв'язок необхідно провести у два етапи: спочатку визначити реакції аналітично, для заданого значення кута нахилу зосередженої сили α (див. табл. 2.5). Після цього необхідно провести дослідження розподілу реакцій залежно від кута α . Це дослідження необхідно проводити засобами ПК КіДиМ, користуючись прикладом тексту файлу вихідних даних. Графіки залежності реакцій необхідно побудувати в діапазоні $[0, 360^\circ]$.

Таблиця 2.4 – Варіанти розрахункових схем для визначення реакцій опор складеної конструкції

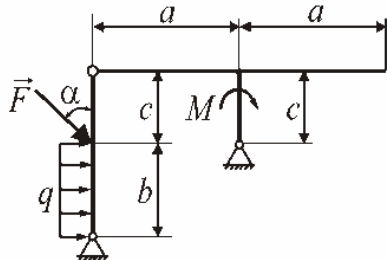


Продовження табл. 2.4

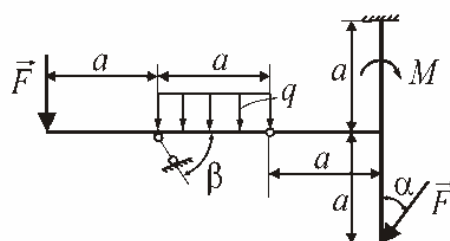


Продовження табл. 2.4

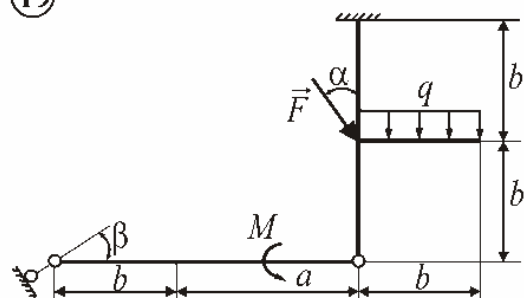
17



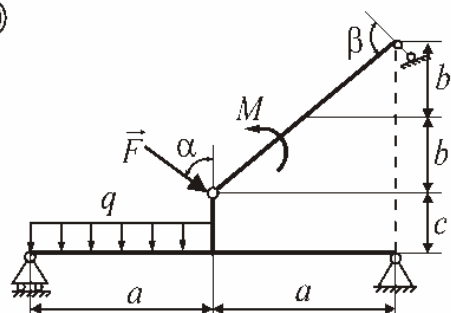
18



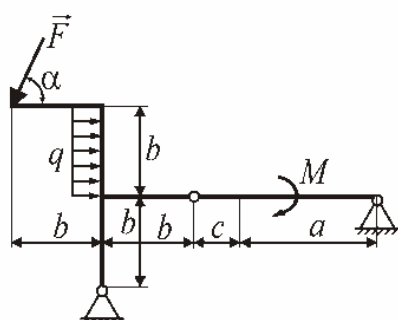
19



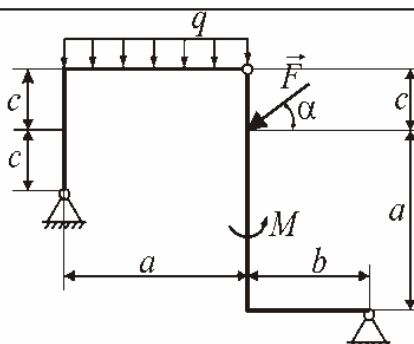
20



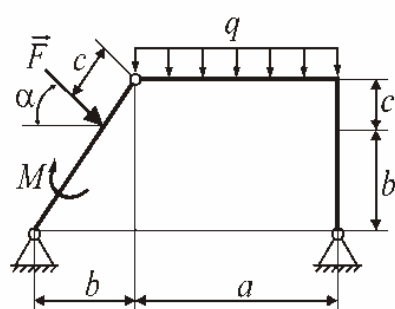
21



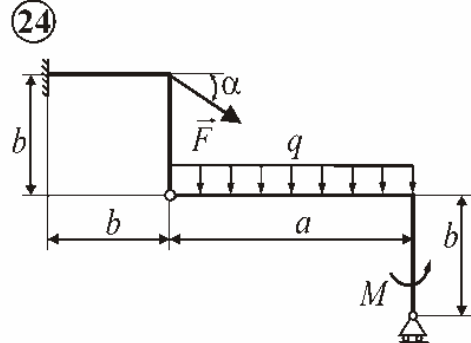
22



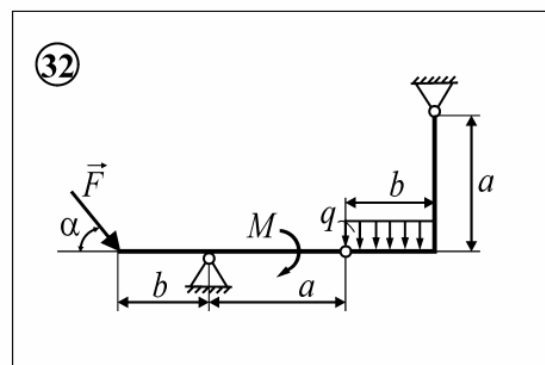
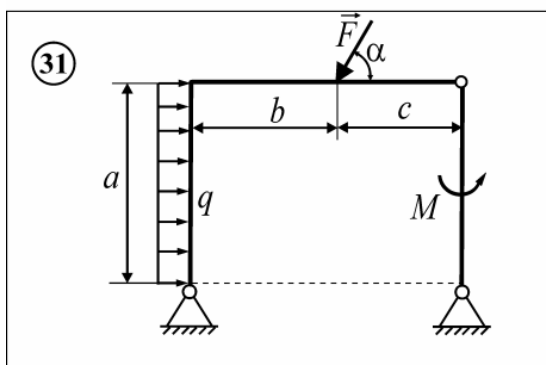
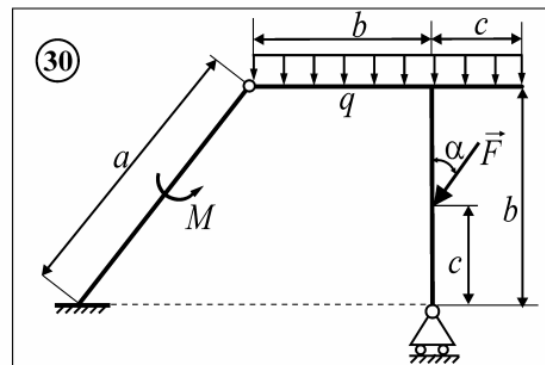
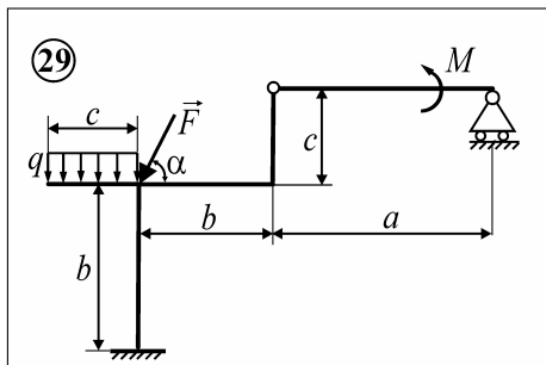
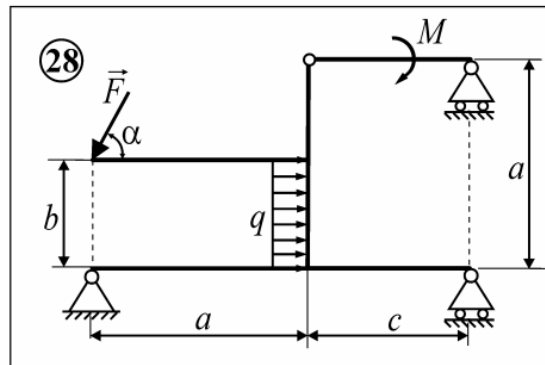
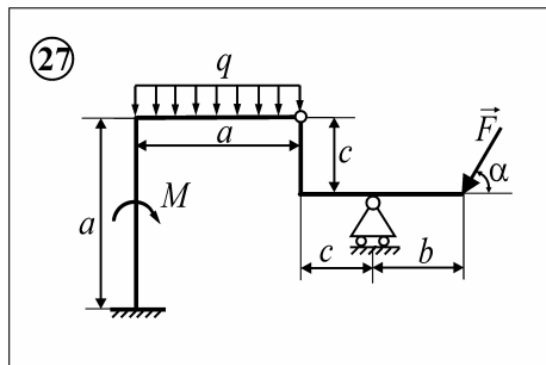
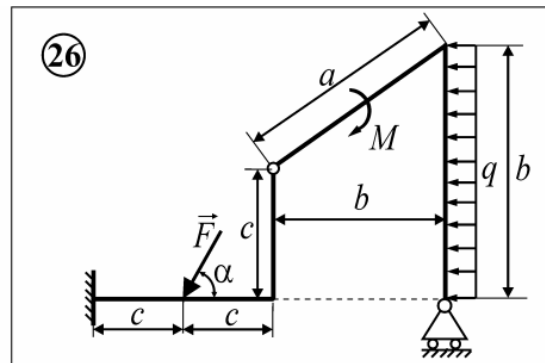
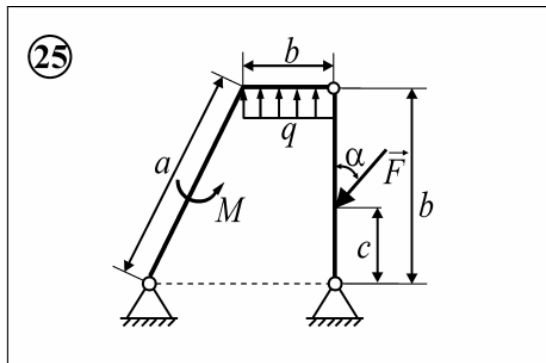
23



24



Продовження табл. 2.4



Таблиця 2.5 – Вихідні дані для визначення реакцій опор складеної конструкції

Номер варіанта	F , Н	M , Н·м	q , Н/м	a , м	b , м	c , м	α , град	β , град
1	10	5	2	0,7	0,5	0,1	45	—
2	15	10	20	1	0,8	0,6	60	—
3	12	12	4	10	5	2,5	45	—
4	20	4	12	7	4	3	30	45
5	100	50	—	2	1	0,6	30	60
6	200	25	80	4	3	2	45	—
7	90	63	12	10	8	6	60	—
8	20	10	5	—	12	6	90	45
9	12	11	—	2	1	0,9	30	—
10	200	100	10	10	4	3	45	45
11	250	150	50	20	10	4	30	60
12	15	14	13	15	5	2	45	—
13	10	12	14	10	8	2	30	—
14	33	22	11	15	7,5	4	60	—
15	10	12	2	10	7	—	30	—
16	8	7	6	—	12	6	45	60
17	34	24	14	12	6	3	30	—
18	5	2	0,1	20	10	5	30	—
19	100	50	12	—	10	—	45	30
20	70	50	20	0,7	0,35	—	60	—
21	300	100	50	3	2	1	45	—
22	44	54	64	5	3	0,8	45	60
23	12	11	9	20	10	5	30	—
24	20	10	15	12	11	10	30	—
25	15	12	10	22	5	7	60	30
26	9	10	12	3	7	1	45	30
27	22	44	11	5	4	3	60	—
28	10	10	10	10	9	8	30	—
29	10	12	3	10	10	15	30	—
30	2	1	0,3	30	12	30	45	60
31	31	41	11	12	15	6	60	—
32	22	22	22	2	1	0,3	45	—

2.4. Визначення реакцій при дії просторової системи сил

На рисунку 2.13 зображено конструкцію, яка являє собою вертикальний вал вагою G , встановлений у підшипникових вузлах A і B . Необхідно знайти реакції опор конструкції та проаналізувати зміну цих реакцій в залежності від відстані між нижньою опорою та привідним шківом.

Вихідні дані. На верхній диск радіуса R намотаний трос, який перекинуто через блок C , на кінці якого закріплено вантаж P . Нижній диск радіусу r за допомогою пасової передачі пов'язаний із двигуном. Натяг ведучої гілки T вдвічі більше натягу веденої гілки t . Конструктивні характеристики пасової передачі такі, що напрям веденої гілки становить кут α із напрямом ведучої. Напрямок ведучої гілки є паралельним до напрямку осі частини тросу, який з'єднує верхній диск із блоком C . У розрахунках приймають такі значення: $a = 0,15$ м, $b = 0,20$ м, $c = 0,15$ м, $R = 0,15$ м, $r = 0,10$ м, $T = 4$ кН, $t = T/2$, $G = 3$ кН.

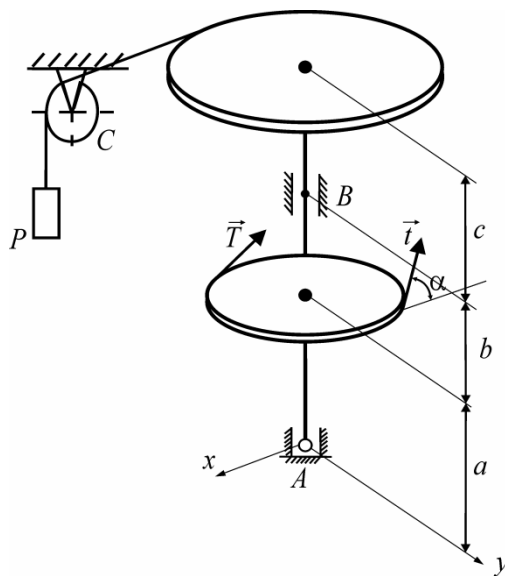


Рисунок 2.13 – Вигляд конструкції при дії просторової системи сил

Складання рівнянь рівноваги. Для рівноваги абсолютно твердого тіла (АТТ), що розглядається, необхідно та достатньо, щоб виконувались умови (2.2). Відповідно рівновагу цього тіла визначають алгебраїчною системою шести рівнянь:

$$\begin{cases} P + X_A + X_B - T - t \cos \alpha = 0; \\ Y_A + Y_B - t \sin \alpha = 0; \\ Z_A - G = 0; \\ at \sin \alpha - (a + b) Y_B = 0; \\ (a + b + c) P + (a + b) X_B - a (T + t \cos \alpha) = 0; \\ RP - rT + rt = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, одержимо такі результати:

$$\begin{aligned} X_A &\approx 3,85 \text{ кН}; Y_A = 0,57 \text{ кН}; Z_A = 3 \text{ кН}; \\ X_B &\approx 0,55 \text{ кН}; Y_B \approx 0,43 \text{ кН}; P \approx 1,33 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Далі знайдемо величини повних реакцій у підшипникових вузлах:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} \approx 4,91 \text{ кН}; \quad R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} \approx 0,7 \text{ кН}.$$

Формування комп'ютерної моделі. Далі розглянемо розв'язок цієї задачі засобами ПК КіДиМ. Метою нашого аналізу буде дослідження змін реакцій у підшипникових вузлах за умов, коли нижня опора віддаляється від привідного шківів. Характеристикою цього віддалення є зміна розміру a . Приймаємо, що a змінюється у діапазоні $[0,15; 1,5]$.

Графічні результати аналізу впливу віддалення нижньої опори від привідного шківів на навантаженість підшипникових вузлів при $\alpha = 30^\circ$ наведено на рисунках 2.14–2.16. З них видно, що реакція нижнього підшипника зменшується, а верхнього – збільшується.

При експлуатації багатьох конструкцій однією з вимог є рівнонавантаженість опор. У випадках, подібних до нашого прикладу, рівнонавантаженість призведе до рівномірного зношення підшипників. Для з'ясування цього питання введемо до розгляду величину, яка кількісно характеризує відносну різницю між величинами реакцій у підшипни-

$$\text{кових вузлах } re = \left| \frac{R_A - R_B}{R_A} \right| \cdot 100 \%.$$

Текст файлу

ВЫПОЛНИЛ:= ст. Иванов А.А., гр. I-11a;

```
# Запис рівнянь рівноваги #
P.x = P+Xa+(Xb-T)-t0*cos(al);
P.y = Ya+Yb-t0*sin(al);
P.z = Za-G;
P.fx = a*t0*sin(al)-(a+b)*Yb;
P.fy = (a+b+c)*P+(a+b)*Xb-a*(T+t0*cos(al));
P.fz = R*P-r*(T-t0);

# Вихідні дані та необхідні розрахунки #
a = 0.15; b = 0.20; c = 0.15;
R = 0.15; r = 0.1; T = 4; t0 = T/2; G = 3;
Ra=sqrt(Xa^2+Ya^2); Rb=sqrt(Xb^2+Yb^2);
re=abs(100*(RA-RB)/RA); al = alG*PI/180; alG = 30;

#Інструкції для розв'язку та представлення результатів#
НЕИЗВЕСТНЫЕ:= P,Xa,Ya,Za,Xb,Yb;
ПЕЧАТАТЬ:= t0,RA,RB,re;
ВАРЬИРОВАТЬ:= a(0.15,1.5);
РАСЧЕТ:= СТАТИКА;
КОНЕЦ;
```

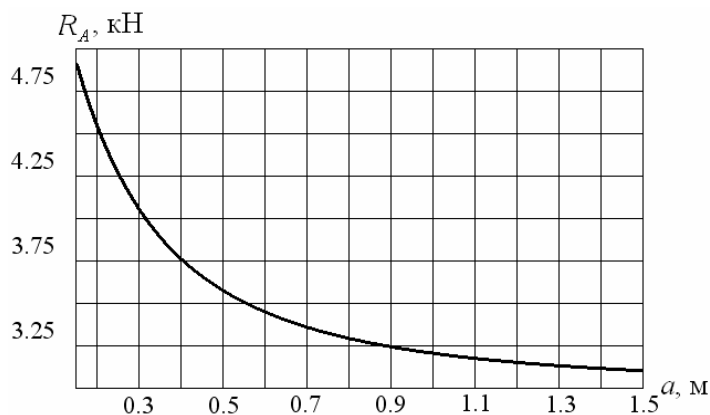


Рисунок 2.14 – Зміна повної реакції у підшипниковому вузлі А відповідно до віддалення нижньої опори від привідного шківів

Згідно з графіком (див. рис. 2.16) опори є навантаженими рівномірно, коли відстань між нижньою опорою та привідним шківом становить приблизно 0,89 м, а найбільша різниця – приблизно 87 % спостерігається при початковому положенні нижньої опори.

Подібні дослідження допомагають інженеру обирати шляхи подальшої оптимізації конструкцій з різних міркувань: економічних, технологічних та інших.

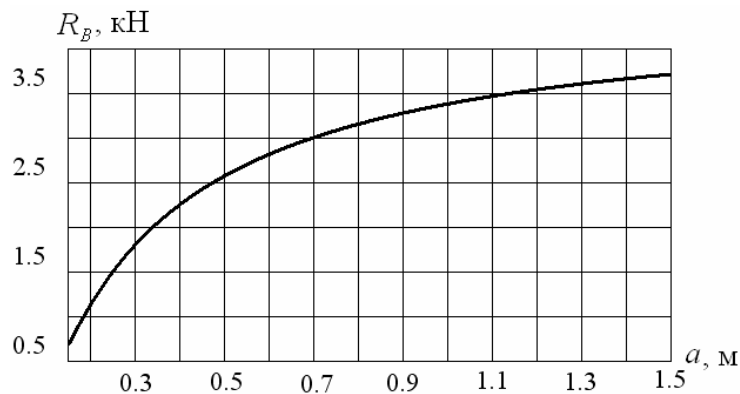


Рисунок 2.15 – Зміна повної реакції у підшипниковому вузлі B відповідно до віддалення нижньої опори від привідного шківa

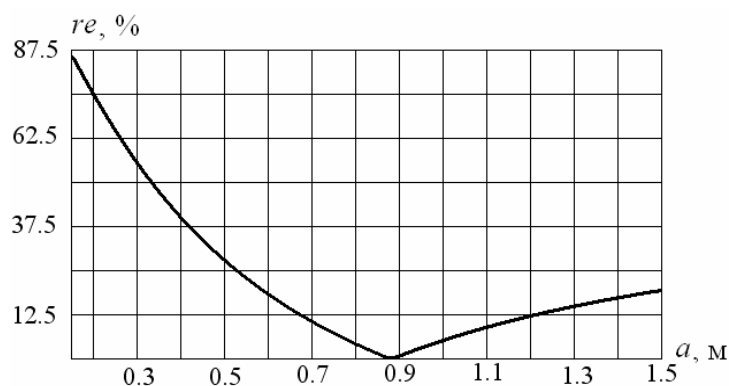


Рисунок 2.16 – Різниця між реакціями у підшипникових вузлах відповідно до віддалення нижньої опори від привідного шківa

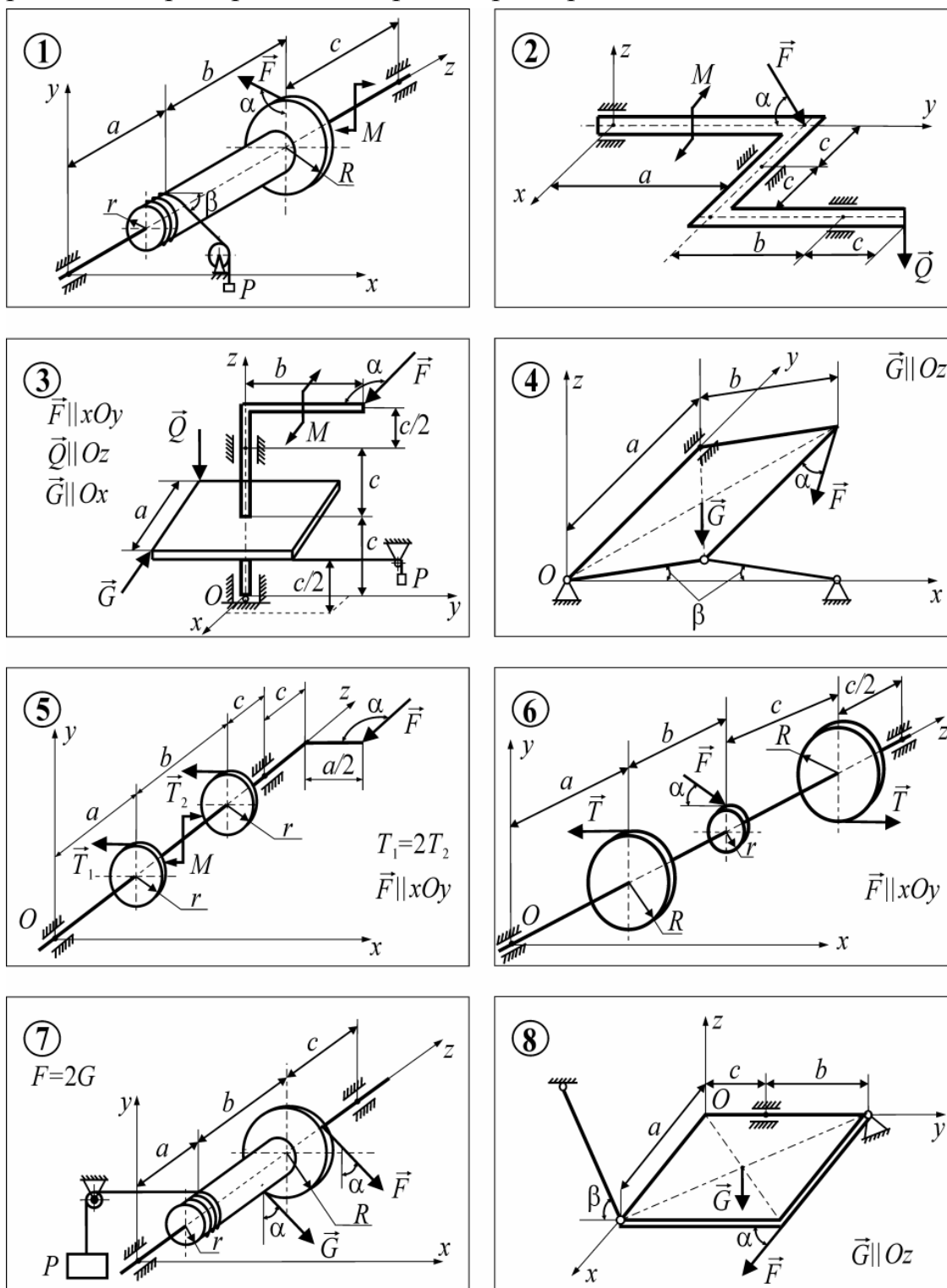
2.4.1. Завдання для самостійної роботи. У табл. 2.6 і 2.7 запропоновано варіанти розрахункових схем та вихідні дані. Згідно з наданими варіантами необхідно визначити реакції опор твердого тіла при дії просторової системи сил.

Розв'язок необхідно провести у два етапи: спочатку визначити реакції аналітично для заданого значення кута нахилу зосередженої сили α (див. табл. 2.10). Після цього необхідно провести дослідження розподілу реакцій залежно від кута α . Це дослідження необхідно проводити засобами ПК КіДиМ, користуючись текстом файлу вихідних

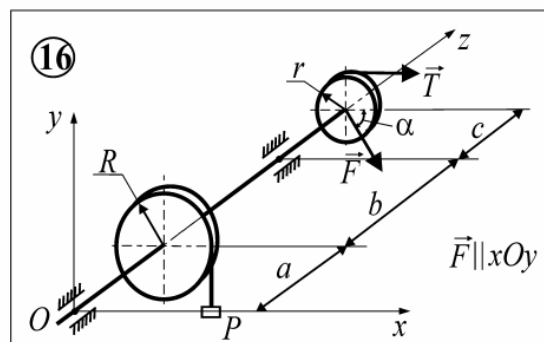
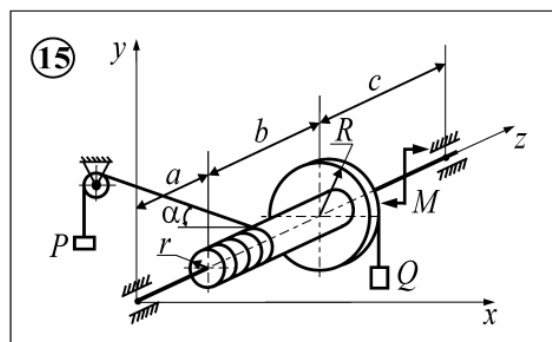
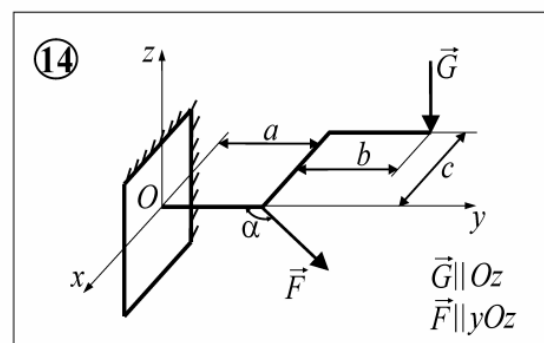
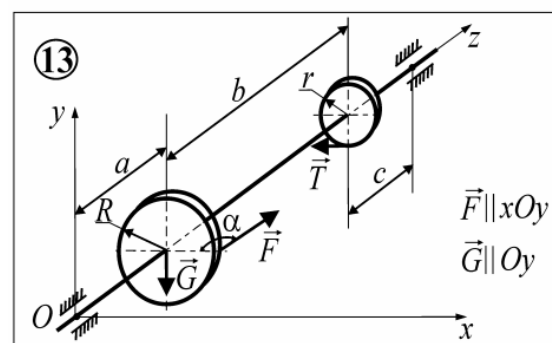
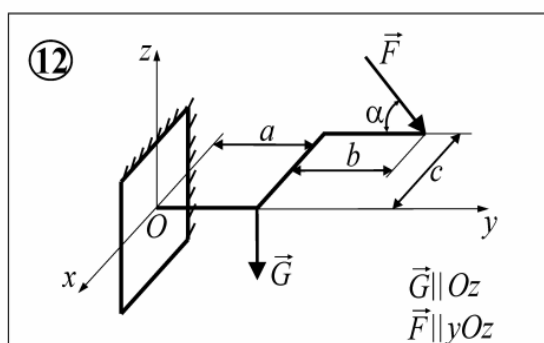
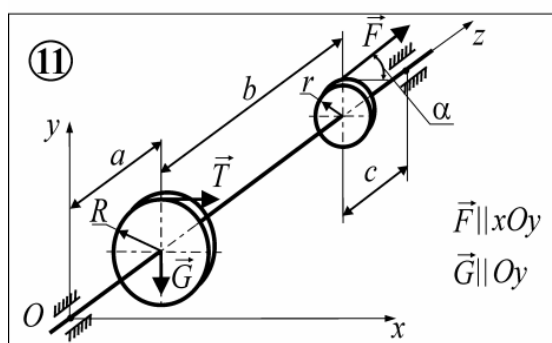
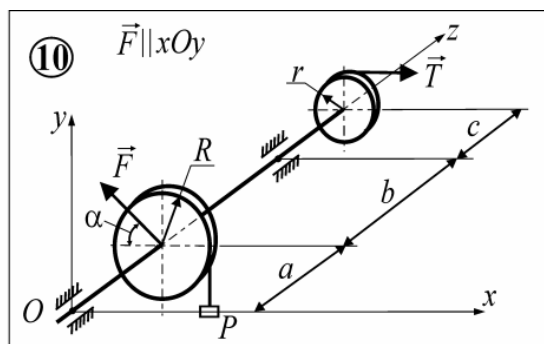
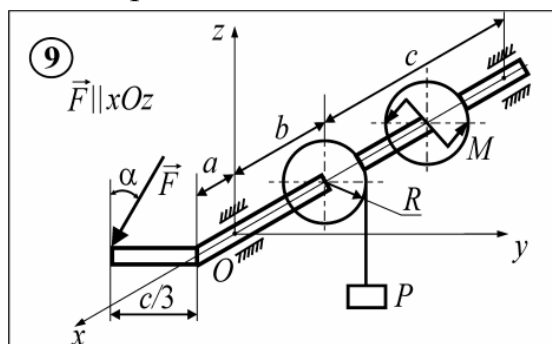
даних, наведеному у цьому підрозділі. Графіки залежності реакцій необхідно побудувати в діапазоні $[0, 360^\circ]$.

Примітка. У варіантах 1, 5–7, 9–11, 13, 15, 16, 20, 24, 31, 32 об'єктом рівноваги є вал, закріплений у підшипниках (диски, які розташовані на валу, є перпендикулярними до його осі, сили, які діють на диски, розташовані у їх площинах), у варіантах 2, 3, 12, 14, 17, 23 об'єктом рівноваги є ламаний стержень (частини якого орієнтовані під прямим кутом відносно один одного), у варіантах 4, 8, 18, 19, 21, 22, 25–30 об'єктом рівноваги є однорідна прямокутна пластина горизонтальна або нахилена під кутом β до горизонталі (сила розташована у площині пластини). Крім реакцій опор слід знайти: у варіантах 1, 2, 7, 9, 10, 15, 16, 20, 22, 24, 25, 28–32 – силу P ; у варіанті 5 – силу T_1 ; у варіантах 6, 11, 13 – силу T .

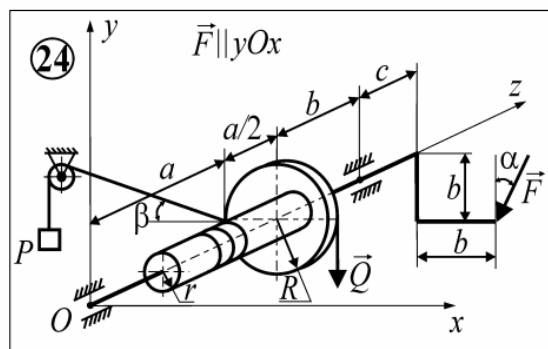
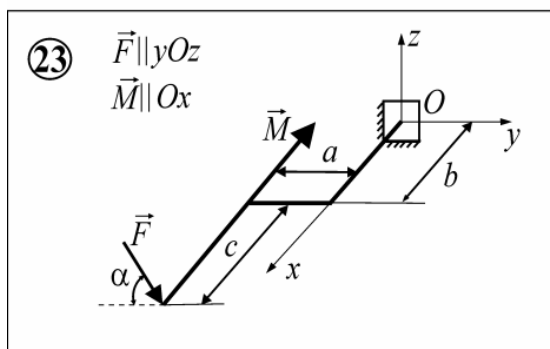
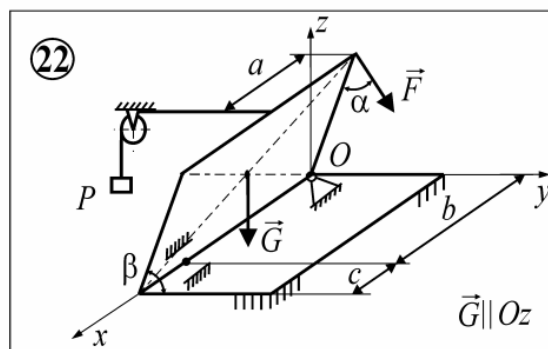
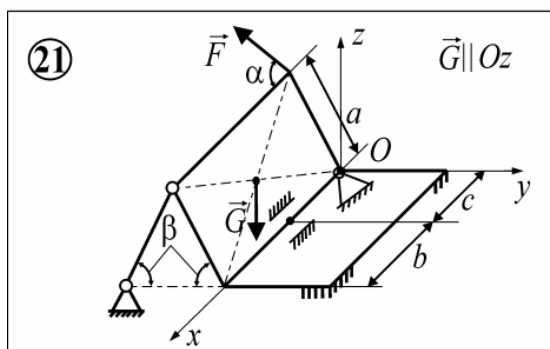
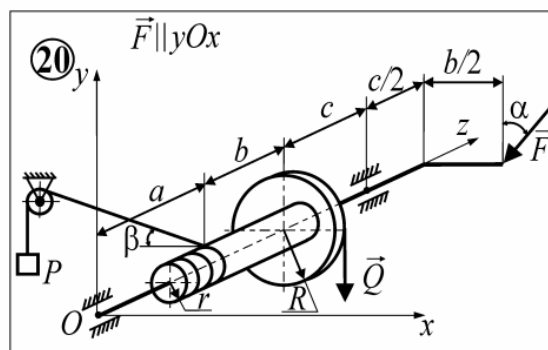
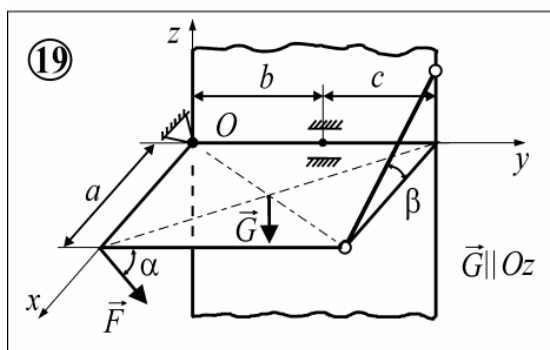
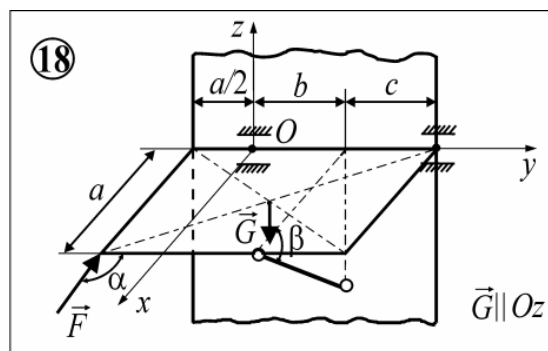
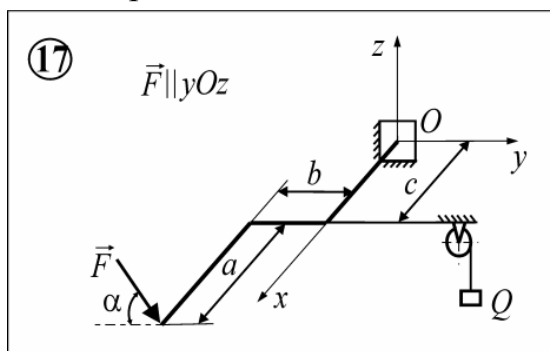
Таблиця 2.6 – Варіанти розрахункових схем для визначення реакцій опор твердого тіла при дії просторової системи сил



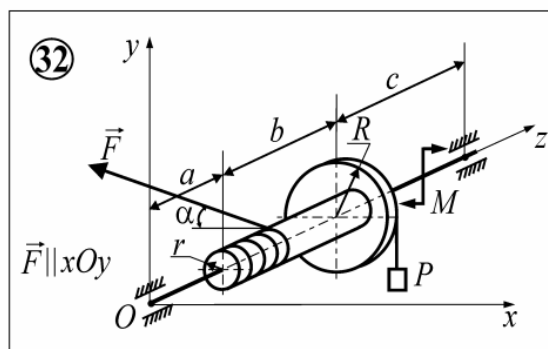
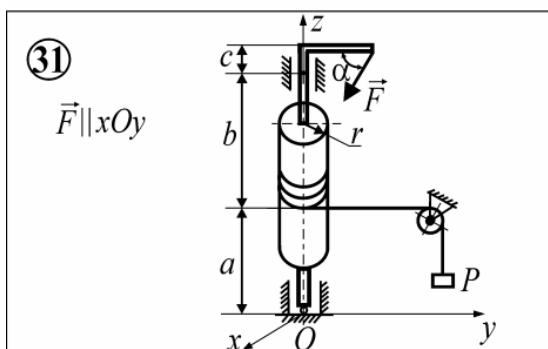
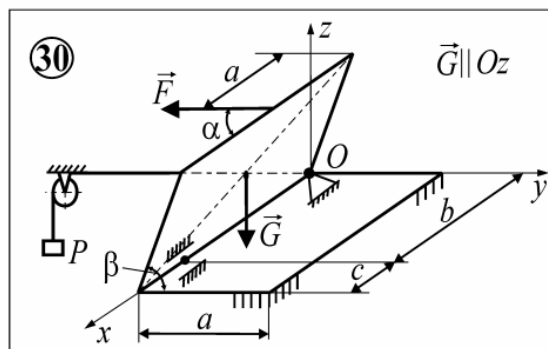
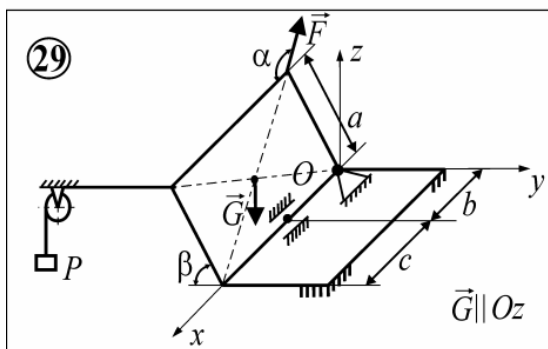
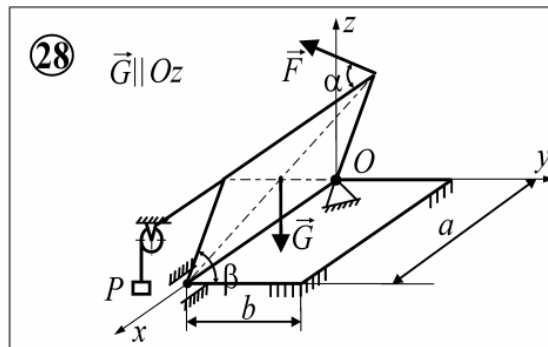
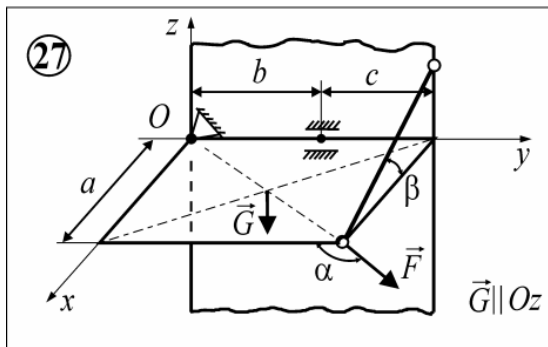
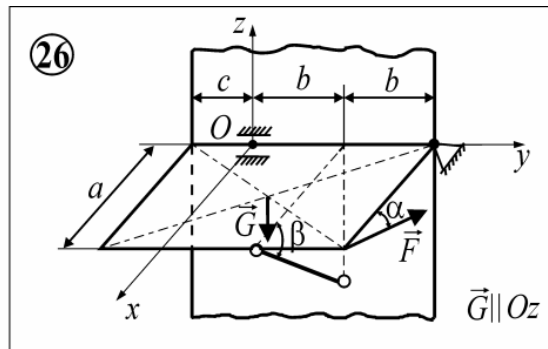
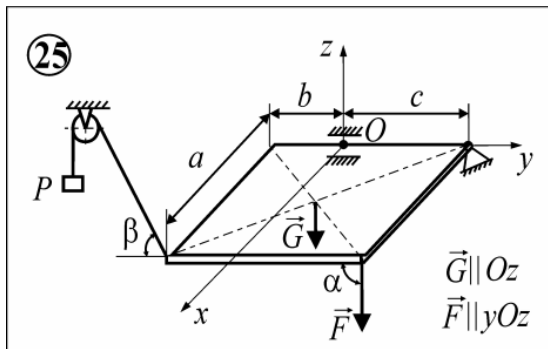
Продовження табл. 2.6



Продовження табл. 2.6



Продовження табл. 2.6



Таблиця 2.7 – Вихідні дані для визначення реакцій опор складеної конструкції при дії просторової системи сил

Номер варіанта	F , Н	M , Н·м	G , Н	T , Н	Q , Н
1	10	15	—	—	—
2	15	10	—	—	20
3	12	4	30	—	7
4	20	—	50	—	—
5	100	16	—	—	—
6	200	—	—	—	—
7	100	—	50	—	—
8	20	—	30	—	—
9	12	11	—	—	—
10	200	—	—	50	—
11	250	—	100	—	—
12	15	—	20	—	—
13	10	—	12	—	—
14	33	—	20	—	—
15	—	12	—	—	20
16	8	—	—	20	—
17	34	—	—	—	10
18	5	—	30	—	—
19	100	—	20	—	—
20	70	—	—	—	50
21	300	—	70	—	—
22	44	—	80	—	—
23	12	11	—	—	—
24	20	—	—	—	100
25	15	—	35	—	—
26	100	—	90	—	—
27	50	—	60	—	—
28	70	—	70	—	—
29	60	—	60	—	—
30	105	—	95	—	—
31	50	—	—	—	—
32	60	12	—	—	—

Продовження табл. 2.7

Номер варіанта	a , м	b , м	c , м	r , м	R , м	α°	β°
1	1	1,5	1	0,2	0,8	90	30
2	1	0,8	0,2	—	—	60	—
3	10	5	2,5	—	—	90	—
4	7	4	—	—	—	30	60
5	3	2	1	0,4	—	90	—
6	4	3	2	—	0,5	45	—
7	5	6	3	0,4	0,8	90	—
8	20	12	6	—	—	90	60
9	2	3	5	—	1,2	30	—
10	3	4	2,5	1	2	45	—
11	3	6	1,5	1	3	30	—
12	10	5	4	—	—	60	—
13	7	10	4	1	4	120	—
14	15	7,5	4	—	—	120	—
15	3	7	7	3	5	30	—
16	6	7	5	0,3	1,3	45	—
17	12	6	3	—	—	30	—
18	20	10	5	—	—	90	60
19	15	9	7	—	—	45	30
20	0,7	0,35	0,2	0,2	0,4	60	30
21	3	2	1	—	—	90	60
22	5	3	0,8	—	—	45	60
23	20	10	5	—	—	30	—
24	12	11	10	—	—	90	—
25	20	15	7	—	—	90	60
26	12	10	8	—	—	30	60
27	20	15	5	—	—	120	30
28	15	10	5	—	—	90	30
29	22	15	8	—	—	150	60
30	30	20	10	—	—	90	60
31	5	6	2	1,5	—	30	—
32	20	15	10	15	3	90	—

Питання для самоконтролю

1. Що таке розрахункова схема?
2. Що таке зосереджена сила; розподілена сила?
3. Яку функцію виконують в'язі?
4. Які типи в'язей існують?
5. Які реакції виникають в разі ідеально гладкої поверхні; шорсткої поверхні?
6. Які реакції виникають в разі ідеального стержня; ідеальної нитки?
7. Які реакції виникають у випадку рухомого шарніра?
8. Які реакції виникають у циліндричному шарнірі; підшипнику?
9. Які реакції виникають у сферичному шарнірі; підп'ятнику?
10. Які реакції виникають у разі жорсткого закріплення?
11. У чому полягає теорема Варіньона?
12. В якому разі алгебраїчне значення моменту сили буде додатним, а в якому – від'ємним?
13. Яким чином обчислюється проекція сили на вісь?
14. Для чого потрібна перевірка на статичну визначеність?
15. Що таке рівняння рівноваги?
16. Який вигляд мають векторні умови рівноваги просторової системи сил?
17. За якою схемою розв'язуються задачі на визначення реакцій у плоских складених конструкціях?

3. КІНЕМАТИКА

3.1. Кінематика точки. Теоретичний матеріал

Кінематика точки – це розділ механіки, в якому вивчають рух матеріальної точки з геометричної точки зору, без розгляду причин, що викликають або змінюють цей рух. Рух – це переміщення об'єктів у просторі із плином часу, він завжди відносний і розглядається відносно системи відліку.

Траєкторія руху точки – геометричне місце послідовних положень точки у просторі із зміною часу відносно заданої системи відліку.

Тіло та система відліку. Тіло відліку – це тіло, відносно якого розглядається рух об'єкта та з яким скріплюють систему відліку. Система відліку в евклідовому просторі – це секундомір та система координат, у якості якої можна вибрати – декартову, полярну, натуральну тощо.

Закон руху – це зв'язок між положенням точки чи тіла у просторі і часом, або система математичних залежностей, які повністю визначають положення об'єкта в заданій системі відліку в довільний момент часу.

Декартові координати. Система відліку із взаємно ортогональними осями координат є декартовою (рис. 3.1). Рух точки у такій системі вважають заданим, якщо координати точки відомі як двічі диференційовані функції часу: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Якщо точка рухається у площині, то її рух може бути заданим таким чином: $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Полярні координати. Якщо з тілом відліку пов'язати полярну вісь Ox , то положення точки буде відомим, якщо задані полярні координати: полярний радіус $r = r(t)$ та полярний кут $\theta = \theta(t)$. При русі точки в площині її рух можна задати полярними координатами (r, θ – радіальна та кутова координати), $\vec{i}_r, \vec{j}_\theta$ – одиничні вектори, які задають позитивні напрями радіальної r та трансверсальної p осей відповідно (див. рис. 3.1).

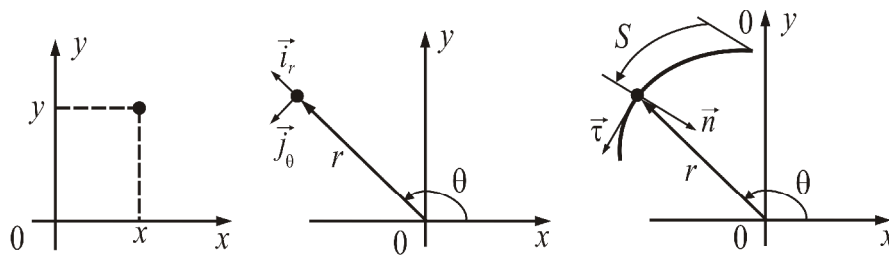


Рисунок 3.1 – Декартова, полярна та натуральна системи координат

Натуральні координати. У цьому випадку задають: траєкторію руху точки (функціональною залежністю, табличним способом або графічно); з рухомою точкою зв'язують натуральну систему координат (натуральний тригранник – трієдр Френе) – сукупність ортогональних осей: дотичної, головної нормалі та бінормалі, напрям яких задають одиничними ортогональними векторами $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$; $\vec{b} = [\vec{\tau}, \vec{n}]$ (див. рис. 3.1); початок відліку на траєкторії, напрям руху по траєкторії; закон зміни дугової координати точки у вигляді $s = s(t)$, тобто закон руху точки по траєкторії.

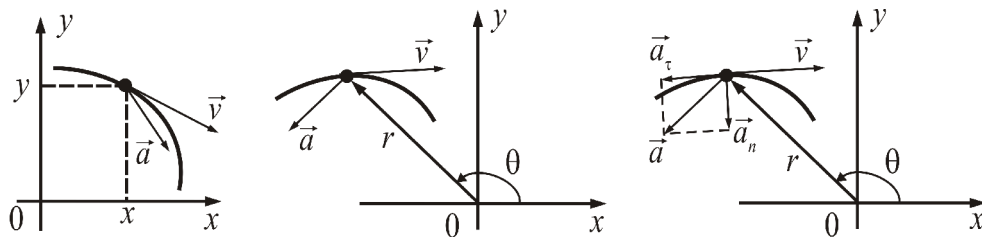


Рисунок 3.2 – Вектори швидкості та прискорення точки у різних системах координат

Швидкість руху точки при заданому законі руху у площині визначають за формулами:

♦ у декартових координатах:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}; \quad v_x = \dot{x}(t); \quad v_y = \dot{y}(t); \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad (3.1)$$

де \vec{v} – вектор швидкості точки, v_x, v_y – його проекції на координатні осі; v – модуль (величина) швидкості точки (рис. 3.2);

♦ у полярних координатах:

$$\vec{v} = v_r \vec{i}_r + v_\theta \vec{j}_\theta; \quad v_r = \dot{r}; \quad v_\theta = r\dot{\theta}; \quad v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}, \quad (3.2)$$

де v_r, v_θ – радіальна та трансверсальна проекції вектора швидкості точки;

♦ у натуральних координатах:

$$\vec{v} = v_\tau \vec{\tau} = \dot{s} \vec{\tau}; \quad \tilde{v} = \dot{s}, \quad (3.3)$$

де v_τ – проекція вектору швидкості на дотичну до траєкторії, \tilde{v} – алгебраїчне значення швидкості (див. рис. 3.2).

Прискорення руху точки при заданому законі руху у площині визначають за формулами:

♦ у декартових координатах:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}; \quad a_x = \ddot{x}; \quad a_y = \ddot{y}; \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \quad (3.4)$$

де \vec{a} – вектор повного прискорення точки; a_x, a_y – його проекції на координатні осі; a – модуль (величина) повного прискорення точки (див. рис. 3.2);

♦ у полярних координатах:

$$\vec{a} = a_r \vec{i}_r + a_\theta \vec{j}_\theta; \quad a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2; \quad a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}; \quad a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}, \quad (3.5)$$

де a_r, a_θ – радіальна та трансверсальна проекції вектора швидкості точки;

♦ у натуральних координатах:

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n}; \quad a_\tau = \ddot{s}; \quad a_n = k\dot{s}^2; \quad k = 1/\rho; \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \quad (3.6)$$

де a_τ, a_n – дотичне і нормальне прискорення; $k = 1/\rho$ – кривина і ρ – радіус кривини траєкторії (див. рис. 3.2).

Годограф вектора – геометричне місце положень кінців змінного вектора в просторі, який для будь-якого моменту часу відкладається від однієї і тієї самої нерухомої точки. Годограф радіус-векторів положення точки, яка рухається, є траєкторією точки, а дотичні вектори до

цього годографа є векторами швидкості точки. За аналогією можна говорити про годограф векторів швидкості, дотичні вектори до якого є векторами прискорення.

Інваріантність векторів швидкості та прискорення. Інваріантність фізичних величин, наприклад векторних величин, означає їхню незалежність від вибору координатних систем. Якщо закон руху у площині задано в декартових координатах: $x = x(t)$, $y = y(t)$, то для визначення векторів швидкості та прискорення у полярній системі координат спочатку слід застосовувати формули переходу:

$$x = r \cdot \cos(\theta); \quad y = r \cdot \sin(\theta); \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \theta = \arctg(y/x). \quad (3.7)$$

Для визначення дотичного та нормального прискорення використовують такі формули:

$$a_\tau = \frac{a_x v_x + a_y v_y}{v}; \quad a_n = \frac{|a_x v_y - a_y v_x|}{v}. \quad (3.8)$$

Слід зауважити, що для визначення закону руху точки уздовж траєкторії – $s = s(t)$ необхідно інтегрувати диференціальне рівняння $\ddot{s} = a_\tau(t)$, $t \in [t_0, T]$ при заданих початкових умовах $s(t_0) = s_0$; $\dot{s}(t_0) = v_0$.

Шлях, який точка проходить уздовж траєкторії, може бути визначена як довжина дуги. Тому, якщо закон руху надано в декартових або в полярних координатах, то застосовуються такі формули:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt; \quad S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2} d\theta.$$

Траєкторії поділяють на прямолінійні та криволінійні. Криволінійні траєкторії, в свою чергу, поділяють на плоскі, наприклад, коло, парабола чи гіпербола і просторові, наприклад, гвинтова лінія, що має форму спіральної пружини. Плоскі криві утворюють перетином двох

площин або площини та тіла, тому вони цілком лежать в одній площині. Просторові криві неможна отримати як перетин якої-небудь поверхні або тіла з площиною, а тому вона не лежить цілком в одній площині. Траєкторії можуть бути обмеженими (по них матеріальна точка рухається періодично) та необмеженими. Траєкторії можуть бути замкненими, наприклад коло, еліпс, та незамкненими, наприклад, парабола, гіпербола, пряма.

Прості криві описують простим рівнянням $y = f(x)$, де y та x – координати положення точки у площині. За типом рівнянь криві поділяють на алгебраїчні й трансцендентні. Наприклад, $y = mx + b$ – це алгебраїчна крива, $y = \log(x)$ чи $y = \operatorname{tg}(x)$ – рівняння трансцендентних кривих.

Параметричні криві – це криві, які задають параметричними рівняннями, що застосовують для складних кривих, які не можна відобразити на графіку простими функціями. Стосовно руху матеріальної точки параметром може виступати час. Багато складних кривих отримали спеціальні найменування, наприклад спіраль Архімеда, локон Ан'єзі, цистоїда Диоклеса, кохоїда Нікомеда, лемніската Бернуллі, фігури Ліссажу.

3.2. Дослідження кінематики плоского руху систем тіл

3.2.1. Теоретичний матеріал. *Плоскопаралельним* або *плоским* називають рух твердого тіла, при якому всі точки тіла рухаються у площинах, паралельних до деякої нерухомої площини, як показано на рис. 3.3. Цю нерухому площину прийнято називати *основною площиною*.

Плоскопаралельний рух тіл є одним з найбільш поширених у техніці. Такий рух здійснюють тіла кочення (колеса, котки, циліндри); окремі деталі механізмів, призначених для перетворення обертального руху одного тіла в поступальний; шестерні планетарних передач тощо. Для опису плоского руху тіла достатньо описати рух проекції твердого тіла на основну площину. Цю проекцію прийнято називати *плоскою фігурою* (див. рис. 3.3). Рух плоскої фігури можна розглядати як ре-

зультат складання поступального руху і обертання навколо однієї з точок, яку називають **полюсом**. Як полюс прийнято обирати точку тіла, кінематичні характеристики руху якої відомі. На рис. 3.4 полюсом є точка A .

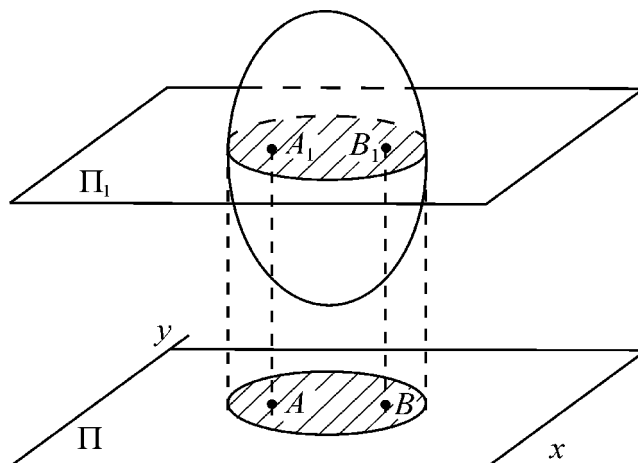


Рисунок 3.3 – Модель плоскопаралельного руху

Рівняння плоскопаралельного (плоского) руху мають такий вигляд:

$$X_A = X_A(t), \quad Y_A = Y_A(t), \quad \varphi = \varphi(t),$$

де X_A, Y_A – координати полюса у нерухомій системі координат; φ – кут повороту навколо полюса. Положення будь-якої точки тіла, що не співпадає з полюсом, може бути визначено двома способами:

з одного боку, якщо задано відрізок AB , то закон руху точки B набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} X_B &= X_A(t) + AB \cdot \cos(\varphi(t) + \alpha); \\ Y_B &= Y_A(t) + AB \cdot \sin(\varphi(t) + \alpha), \end{aligned} \quad (3.9)$$

де X_B, Y_B – координати точки B у нерухомій системі координат; α – кут, що утворює відрізок AB з віссю x рухомої системи координат. Оскільки рухома система координат пов'язана з точками твердого тіла, то кут α при русі тіла залишається постійним (див. рис. 3.4);

з іншого боку, можна скористатися формулами зв'язку при повороті однієї системи координат відносно іншої:

$$\begin{aligned} X_B &= X_A(t) + x_B \cdot \cos \varphi(t) - y_B \cdot \sin \varphi(t); \\ Y_B &= Y_A(t) + x_B \cdot \sin \varphi(t) + y_B \cdot \cos \varphi(t), \end{aligned} \quad (3.10)$$

де x_B, y_B – координати точки B у рухомій системі координат, які залишаються незмінними у процесі руху. За рівняннями руху точки (3.9) або (3.10) можуть бути визначені траєкторія точки, її швидкість і прискорення – за формулами (3.1) та (3.4).

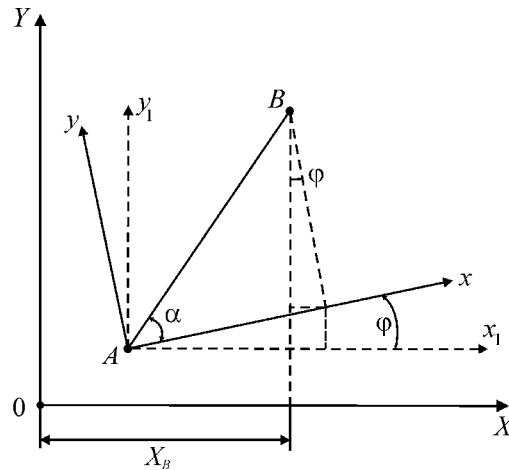


Рисунок 3.4 – Визначення координат довільної точки тіла при плоскопаралельному русі

Також кінематичні характеристики точки тіла при плоскопаралельному русі можна визначити за допомогою **векторного способу**. У цьому разі вектор швидкості визначають таким чином:

$$\begin{aligned} \vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overline{AB}, \quad \text{або} \\ \vec{v}_B &= (v_{Ax} - \omega(Y_B - Y_A))\vec{i} + (v_{Ay} - \omega(X_B - X_A))\vec{j}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

де v_{Ax}, v_{Ay} – проекції вектора швидкості полюса на осі нерухомої системи координат; $\vec{\omega}, \omega$ – вектор та модуль кутової швидкості тіла. Вектор прискорення:

$$\begin{aligned} \vec{a}_B &= \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \overline{AB} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \overline{AB}, \quad \text{або} \\ \vec{a}_B &= (a_{Ax} - \varepsilon(Y_B - Y_A) - \omega^2(X_B - X_A))\vec{i} + \\ &+ (a_{Ay} - \varepsilon(X_B - X_A) - \omega^2(Y_B - Y_A))\vec{j}, \end{aligned}$$

де a_{Ax}, a_{Ay} – проекції вектора прискорення полюса на осі нерухомої системи координат; $\vec{\varepsilon}, \varepsilon$ – вектор та модуль кутового прискорення тіла. Слід зауважити, що вектори кутової швидкості тіла $\vec{\omega} = \dot{\phi} \vec{k}$ та його кутового прискорення $\vec{\varepsilon} = \dot{\omega} \vec{k} = \ddot{\phi} \vec{k}$ при плоскопаралельному русі увесь час руху перпендикулярні до основної площини. Звідси можна отримати зручні формули для визначення кутової швидкості та кутового прискорення тіла при його плоскопаралельному русі за відомими швидкостями і прискореннями двох його точок:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{v_{Ax} - v_{Bx}}{Y_B - Y_A} = \frac{v_{Ay} - v_{By}}{X_B - X_A}; \\ \varepsilon &= \frac{a_{Ax} - a_{Bx} - \omega^2 (X_B - X_A)}{Y_B - Y_A} = \frac{a_{Ay} - a_{By} - \omega^2 (Y_B - Y_A)}{X_B - X_A}.\end{aligned}\quad (3.12)$$

Якщо проаналізувати теорію плоскопаралельного руху твердого тіла, то можна зробити деякі висновки.

Висновок 1. Проекції швидкостей та прискорень точок тіла на пряму, що з'єднує ці точки, рівні поміж собою.

Висновок 2. У будь-який момент руху плоскої фігури уздовж основної площини існує точка, швидкість якої дорівнює нулю. Цю точку називають *миттєвим центром швидкостей* (прийняте скорочення – МЦШ).

МЦШ знаходиться на перетині перпендикулярів до векторів швидкостей точок (рис. 3.5), тоді по відомій швидкості однієї з точок і її відстані до МЦШ спочатку визначають кутову швидкість $\omega_{AB} = v_A / PA$ і напрям обертання плоскої фігури, а потім – величину $v_B = \omega_{AB} \cdot PB$ та напрям швидкості іншої точки.

До типових випадків визначення МЦШ відносять такі:

1) коли кочення колеса відбувається без прослизання по нерухомій поверхні (рис. 3.6). У кожен момент руху тіла при його коченні без ковзання МЦШ – це точка дотику тіла з нерухомою поверхнею. Кутову швидкість колеса визначають з відношення швидкості центра колеса до його радіуса;

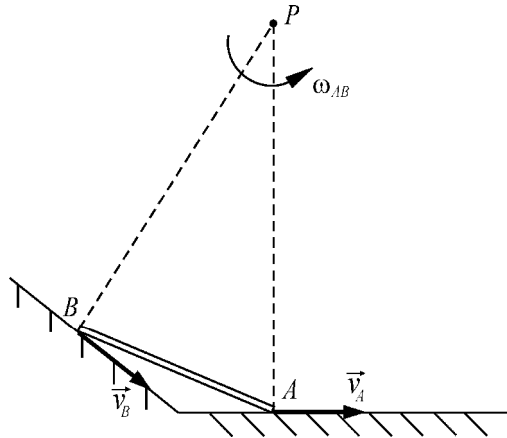


Рисунок 3.5 – Загальний випадок визначення положення МЦШ

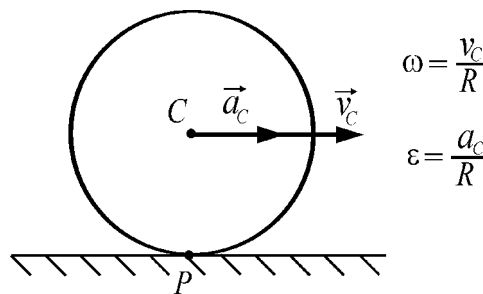


Рисунок 3.6 – Визначення положення МЦШ, миттєвої кутової швидкості та прискорення при коченні колеса

2) коли відомі напрями руху двох точок тіла, а вектори швидкостей точок паралельні між собою і перпендикулярні відрізку, що з'єднує точки. Це часто зустрічається, якщо визначають кутові швидкості тіл кочення, як на рис. 3.7 а. МЦШ знаходиться на перетині лінії, що з'єднує точки, і тієї лінії, що з'єднує кінці векторів швидкостей точок. Величині швидкостей точок при цьому мають бути відомі. При протилежному напрямі векторів швидкостей (рис. 3.7 б) МЦШ розташований між точками, швидкості яких відомі; при однаковому напрямі – з боку меншої швидкості та на продовженні відрізку, що з'єднує точки;

3) коли вектори швидкостей точок паралельні між собою та не перпендикулярні відрізку, що їх з'єднує (рис. 3.8). В цьому випадку прийнято говорити про миттєво-поступальний рух тіла, тому кутова швидкість тіла дорівнює нулю, а швидкості усіх його точок рівні між собою. Слід додати також, що рівність швидкостей спостерігається

лише на даний момент руху тіла, але у той же час прискорення точок тіла різні.

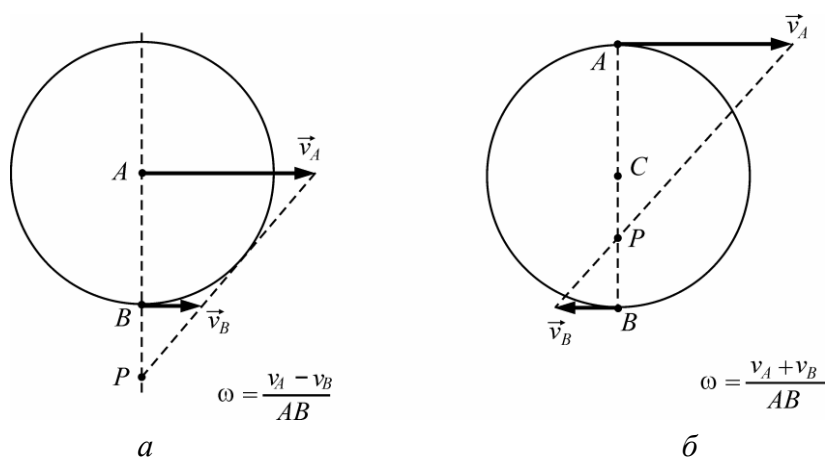


Рисунок 3.7 – Визначення МЦШ, якщо вектори швидкостей двох точок тіла перпендикулярні до прямої, яка їх з'єднує: *a* – вектори спрямовані у один і той самий бік; *б* – вектори спрямовані у протилежні боки

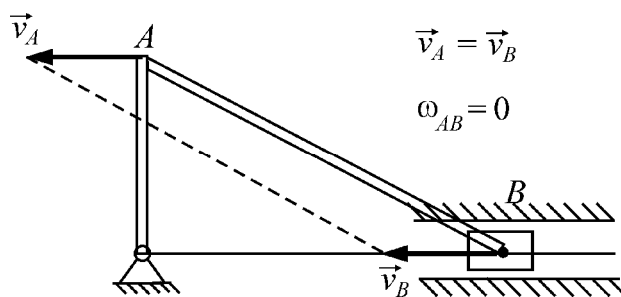


Рисунок 3.8 – Випадок миттєво-поступального руху

3.2.2. Дослідження кінематики кривошипно-шатунного механізму. На рис. 3.9 показано схему кривошипно-шатунного механізму у довільному положенні. Механізм складається з кривошипу OA , який обертається навколо нерухомої осі, що проходить через точку O , шатуна AB та повзуна B , який може рухатись лише по горизонталі. Обертання кривошипу відбувається за законом, рад:

$$\varphi = t^2, \quad (3.13)$$

кут φ відлічується від горизонталі.

Необхідно визначити швидкості та прискорення точок A , B , C та кутову швидкість і кутове прискорення шатуна AB для того моменту

часу, коли кут обертання кривошипу становить $\varphi_* = \frac{\pi}{6}$. Ланки механізму мають наступні розміри: $OA = 30\text{ см}$, $AB = 60\text{ см}$, $AC = 30\text{ см}$.

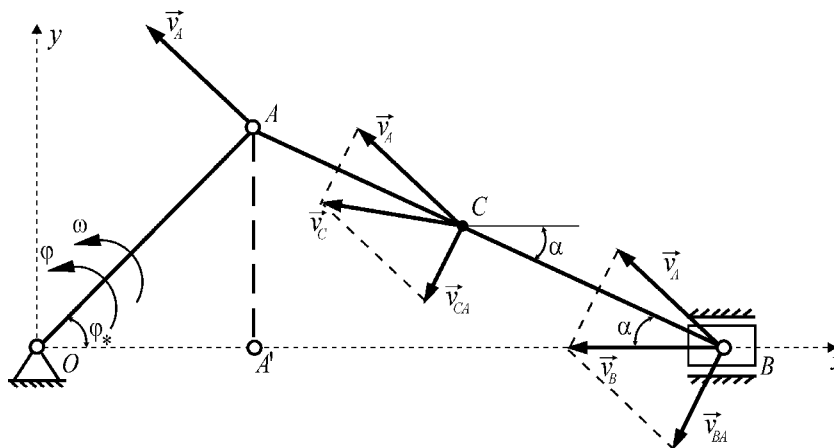


Рисунок 3.9 – Розрахункова схема механізму із векторами швидкостей характерних точок

Ланки механізму здійснюють такі види руху: кривошип OA – обертальний рух, шатун AB – плоскопаралельний рух, повзун B – поступальний рух.

Спочатку визначимо момент часу, який відповідає заданому куту обертання кривошипа, для цього необхідно розв'язати алгебраїчне рівняння: $\varphi = \varphi_*$, тобто $t^2 = \frac{\pi}{6}$, звідки $t_* \approx 0,72\text{ с}$. Для визначення кінематичних характеристик точки A необхідно знати величини кутової швидкості ω та кутового прискорення ε кривошипу OA :

$$\begin{aligned}\omega &= \dot{\varphi} = 2t \Big|_{t=t_*} = 1,44\text{ с}^{-1}; \\ \varepsilon &= \dot{\omega}_{OA} = 2\text{ с}^{-2}.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Далі визначаємо швидкість точки A :

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 43,2 \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Вектор \vec{v}_A спрямований перпендикулярно до кривошипа OA згідно з напрямом кутової швидкості ω (див. рис. 3.9). Оскільки повзун B

може рухатись лише вздовж горизонтальних напрямних, то його швидкість спрямована горизонтально у той бік, щоб виконувалась теорема про рівність проекції швидкостей на відрізок AB . Шатун AB рухається плоскопаралельно, тому для визначення швидкості точки B скористаємося формулами (3.11), якщо у якості полюсу обрано точку A :

$$\begin{aligned}\vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}; \\ v_{BA} &= \omega_{AB} \cdot AB.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Значення кутової швидкості шатуна AB нам поки що невідоме, проте відомо, що вектор \vec{v}_{BA} перпендикулярний до відрізка AB (див. рис. 3.7), внаслідок чого ми можемо спроектувати векторну рівність із (3.15) на осі декартової системи координат та одержати систему двох алгебраїчних рівнянь, де невідомими будуть v_B та v_{BA} :

$$\begin{aligned}-v_B &= -v_A \cdot \sin \varphi_* - v_{BA} \sin \alpha; \\ 0 &= v_A \cdot \cos \varphi_* - v_{BA} \cos \alpha.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Для розв'язання системи (3.16) необхідно визначити тригонометричні функції кута α , для чого слід розглянути співвідношення у прямокутних трикутниках $OA'A$ та $BA'A$:

$$\begin{aligned}AA' &= OA \cdot \sin \varphi_*; \quad \sin \alpha = \frac{AA'}{AB} = 0,25; \\ \cos \alpha &= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 0,968.\end{aligned}$$

Остаточно після розв'язання системи (3.16) одержуємо:

$$v_B \approx 31,26 \frac{\text{см}}{\text{с}}, \quad v_{BA} \approx 38,65 \frac{\text{см}}{\text{с}}, \quad \omega_{AB} = \frac{v_{BA}}{AB} = 0,64 \text{ с}^{-1}.$$

Далі аналогічно визначимо прискорення точки C шатуна AB :

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA}; \quad \vec{v}_{CA} \perp AB; \quad v_{CA} = \omega_{AB} \cdot AC \approx 19,2 \frac{\text{см}}{\text{с}};$$

$$v_{Cx} = -v_A \cdot \sin \varphi_* - v_{CA} \cdot \sin \alpha \approx -26,4 \text{ см/с};$$

$$v_{Cy} = v_A \cdot \cos \varphi_* - v_{CA} \cdot \cos \alpha \approx 18,82 \text{ см/с};$$

$$v_C = \sqrt{(v_{Cx})^2 + (v_{Cy})^2} \approx 32,42 \text{ см/с}.$$

Слід зазначити, що визначення швидкостей точок тіла, яке здійснює плоскопаралельний рух, також можна було провести із використанням поняття про миттєвий центр швидкостей.

Переходимо до визначення прискорень. Вектор прискорення точки A знаходимо так:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\text{об}} + \vec{a}_A^{\text{до}},$$

де $\vec{a}_A^{\text{об}}$ та $\vec{a}_A^{\text{до}}$ – вектори обертального та доосьового прискорень точки A , спрямовані так, як показано на рисунку 3.10. Їх модулі, а також модуль повного прискорення точки A дорівнюють:

$$a_A^{\text{об}} = \varepsilon \cdot OA = 60 \text{ см/с}^2; \quad a_A^{\text{до}} = \omega^2 \cdot OA = 62,21 \text{ см/с}^2;$$

$$a_A = \sqrt{(a_A^{\text{об}})^2 + (a_A^{\text{до}})^2} = 86,43 \text{ см/с}^2.$$

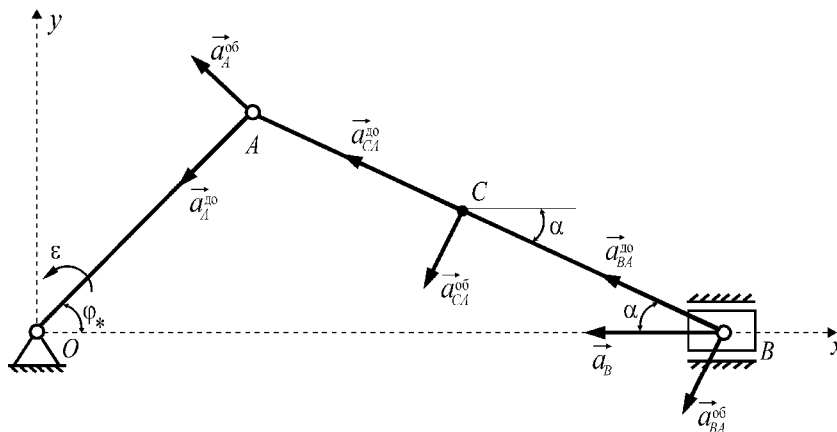


Рисунок 3.10 – Розподіл прискорень

Для знаходження прискорень точок B і C використаємо теорему про прискорення точок плоскої фігури, обравши в якості полюса точку A . Таким чином, для точки B маємо:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\text{об}} + \vec{a}_{BA}^{\text{до}} = \vec{a}_A^{\text{об}} + \vec{a}_A^{\text{до}} + \vec{a}_{BA}^{\text{об}} + \vec{a}_{BA}^{\text{до}}, \quad (3.17)$$

де $\vec{a}_{BA}^{\text{об}}$ і $\vec{a}_{BA}^{\text{до}}$ – вектори обертального та доосьового прискорень точки B у її обертальному русі навколо полюса (точки A). Вектор $\vec{a}_{BA}^{\text{до}}$ завжди спрямований від точки B до точки A , а його модуль дорівнює:

$$a_{BA}^{\text{до}} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 24,58 \text{ см/с}^2.$$

Стосовно векторів \vec{a}_B і $\vec{a}_{BA}^{\text{об}}$ відомі лише лінії, на яких вони розташовані: вектор \vec{a}_B – на горизонталі уздовж напрямних повзуна, вектор $\vec{a}_{BA}^{\text{об}}$ – перпендикулярно до вектора $\vec{a}_{BA}^{\text{до}}$. Задамо напрямки цих векторів довільно вздовж вказаних ліній (див. рис. 3.10). Модулі векторів \vec{a}_B і $\vec{a}_{BA}^{\text{об}}$ можна визначити, якщо спроектувати векторну рівність (3.17) на осі декартової системи координат:

$$\begin{aligned} -a_B &= -a_A^{\text{об}} \cdot \sin \varphi_* - a_A^{\text{до}} \cdot \cos \varphi_* - a_{BA}^{\text{об}} \cdot \sin \alpha - a_{BA}^{\text{до}} \cdot \cos \alpha; \\ 0 &= a_A^{\text{об}} \cdot \cos \varphi_* - a_A^{\text{до}} \cdot \sin \varphi_* - a_{BA}^{\text{об}} \cdot \cos \alpha + a_{BA}^{\text{до}} \cdot \sin \alpha; \\ a_B &\approx 114,64 \text{ см/с}^2; \quad a_{BA}^{\text{об}} \approx 27,89 \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

Значення a_B і $a_{BA}^{\text{об}}$ виявились додатними, тобто їх напрями були обрані правильно.

Кутове прискорення шатуна AB можна визначити, якщо скористатися формулою визначення модуля обертального прискорення точки B у її русі по відношенню до точки A :

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^{\text{об}}}{AB} \approx 0,47 \text{ с}^{-2}.$$

Далі аналогічно визначимо прискорення точки C шатуна AB :

$$\begin{aligned}
\vec{a}_C &= \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^{об} + \vec{a}_{CA}^{до} = \vec{a}_A^{об} + \vec{a}_A^{до} + \vec{a}_{CA}^{об} + \vec{a}_{CA}^{до}; \\
a_{CA}^{об} &= \varepsilon_{AB} \cdot AC \approx 14,1 \text{ см/с}^2; \\
a_{CA}^{до} &= \omega_{AB}^2 \cdot AC \approx 12,29 \text{ см/с}^2; \\
a_{Cx} &= -a_A^{об} \cdot \sin \varphi_* + a_A^{до} \cdot \cos \varphi_* - a_{CA}^{об} \cdot \sin \alpha + \\
&+ a_{CA}^{до} \cdot \cos \alpha \approx -99,31 \text{ см/с}^2; \\
a_{Cy} &= a_A^{об} \cdot \cos \varphi_* - a_A^{до} \cdot \sin \varphi_* - a_{CA}^{об} \cdot \cos \alpha + \\
&+ a_{CA}^{до} \cdot \sin \alpha \approx 10,28 \text{ см/с}^2; \\
a_C &= \sqrt{(a_{Cx})^2 + (a_{Cy})^2} \approx 99,84 \text{ см/с}^2.
\end{aligned}$$

3.2.3. Комп'ютерне моделювання кінематики кривошипно-шатунного механізму. Для комп'ютерного моделювання складного руху точки скористаємось засобами ПК КіДиМ. Для цього необхідно задати рух характерних точок механізму у декартовій системі координат (рис. 3.11).

Для визначення координат точок A , B , C можна використати тригонометричні співвідношення у прямокутному трикутнику $OA''A$ та подібність прямокутних трикутників $BA'A$, $BC'C$ та $CC''A$:

$$\begin{aligned}
x_A &= OA' = OA \cdot \cos \varphi; \quad y_A = A'A = OA \cdot \sin \varphi; \\
x_B &= OA' + A'B; \quad A'B = AB \cdot \cos \alpha; \\
\alpha &= \arcsin\left(\frac{AA'}{AB}\right) = \arcsin\left(\frac{y_A}{AB}\right); \\
x_B &= x_A + AB \cdot \cos \alpha; \quad y_B = 0; \\
x_C &= OA' + A'C'; \quad A'C' = C''C; \quad y_C = C'C; \\
C''C &= AC \cdot \cos \alpha; \quad C'C = CB \cdot \sin \alpha; \quad CB = AB - AC; \\
x_C &= x_A + AC \cdot \cos \alpha; \quad y_C = (AB - AC) \cdot \sin \alpha.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

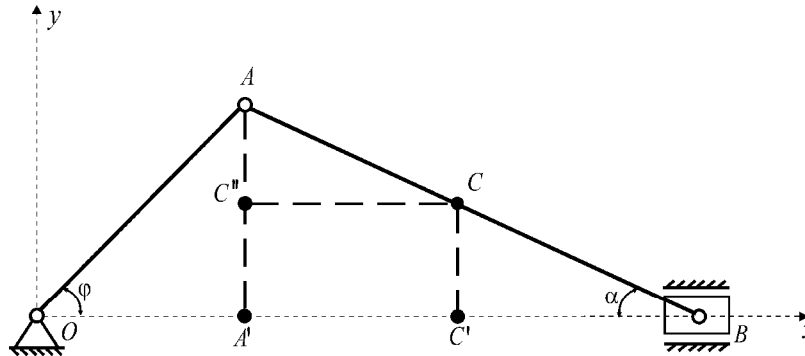


Рисунок 3.11 – До комп'ютерного моделювання
кінематики плоскопаралельного руху

У формулах (3.18) визначені не лише закони руху характерних точок механізму, а й закон зміни у часі кута повороту шатуна – α . Визначена функція часу кута повороту шатуна дозволяє безпосередньо визначати його кінематичні характеристики – кутову швидкість ω_{AB} та кутове прискорення ϵ_{AB} ($\omega_{AB} = \dot{\alpha}$; $\epsilon_{AB} = \ddot{\alpha}$).

З іншого боку ці самі кінематичні характеристики шатуна, як тіла, що здійснює плоскопаралельний рух можуть бути визначені згідно з формулою (3.12).

Закони руху характерних точок механізму та закон зміни у часі кута повороту кривошипу використані у файлі вихідних даних для ПК КіДиМ, текст якого наведений далі.

Текст файлу

РАБОТА:=№2.1 Моделювання плоскопаралельного руху;

ВЫПОЛНИЛ:= ст.Іванов П.С. гр.І-10а;

#Завдання законів руху#

fi = t^2; OA = 30; AB = 60; AC = 30;

XA = OA*cos(fi); YA = OA*sin(fi); alfa = arcsin(YA/AB);

XB=XA+AB*cos(alfa); YB=0;

XC=XA+AC*cos(alfa); YC=(AB-AC)*sin(alfa);

#Визначення основних кінематичних харакетристик#

vAx = XA't; vAy = YA't; vA = sqrt(vAx^2+vAy^2);

vBx = XB't; vBy = YB't; vB = sqrt(vBx^2+ vBy^2);

vCx = XC't; vCy = YC't; vC = sqrt(vCx^2 + vCy^2);

aAx = XA't't; aAy = YA't't; aA = sqrt(aAx^2 + aAy^2);

aBx = XB't't; aBy = YB't't; aB = sqrt(aBx^2 + aBy^2);

```

aCx = XC't't; aCy = YC't't; aC = sqrt(aCx^2 + aCy^2);
omegaOA = fi't; epsilonOA = fi't't;
omegaAB = alfa 't; epsilonAB = alfa 't't;
omegaAB1 =(vAy-vBy)/(XB-XA);
epsilonAB1 =(aAy-aBy-omegaAB^2*(YB-YA))/(XB-XA);

#Інструкції до виконання розрахунків#
fiG = fi*180/pi;
tk = n*T; T = sqrt(2*pi); n=1.5;
ВАРЬИРОВАТЬ := t,0,tk;
ПЕЧАТАТЬ := YA(XA),YC(XC),fi,vB(fiG),aB(fiG),
vC(fiG),aC(fiG),vA(fiG),aA(fiG);
СРАВНИТЬ := абсциси(XA,XB,XC), ординати(YA,YB,YC),
швидкості(vA,vB,vC), прискорення(aA,aB,aC),
кутові швидкості(omegaOA,omegaAB, omegaAB1),
кутові прискорення(epsilonOA,epsilonAB, epsilonAB1);
РАСЧЕТ := КИНЕМАТИКА;
КОНЕЦ;

```

Прийняті у тексті файлу позначення можуть бути розшифровані таким чином: **fi** – закон зміни у часі кута обертання кривошипа *OA* (відповідно до формули (3.13)); **XA, YA, XB, YB, XC, YC** – декартові координати характерних точок механізму (відповідно до формул (3.18)); **vAx, vAy, vA, vBx, vBy, vB, vCx, vCy, vC** – проекції та модулі швидкостей характерних точок механізму (відповідно до формул (3.1)); **aAx, aAy, aA, aBx, aBy, aB, aCx, aCy, aC** – проекції та модулі прискорень характерних точок механізму (відповідно до формул (3.4)); **omegaOA, epsilonOA** – кутові швидкість та прискорення кривошипа *OA* (відповідно до формул (3.14)); **omegaAB, epsilonAB** – кутові швидкість та прискорення шатуна *AB*, які визначаються безпосереднім диференціюванням його кута повороту; **omegaAB1, epsilonAB1** – кутові швидкість та прискорення шатуна *AB*, які визначаються відповідно до формул (3.12); **fiG** – кут обертання кривошипа *OA* у градусах; **tk** – час, упродовж якого відбувається розв’язок. У даному прикладі **tk** обирається залежно від кількості обертань, які здійснює кривошип *OA*. Для цього визначається час одного повного обертання – **T**. Повне обертання відповідає куту повороту – 2π , тобто час одного повного обер-

тання можна визначити з умови: $\varphi(T) = 2\pi$. Таким чином, у даному прикладі маємо: $T^2 = 2\pi \Rightarrow T = \sqrt{2\pi}$; n – кількість обертань кривошипу, подальші результати наведені для випадку, коли $n = 1,5$.

Різноманітна графічна інформація постпроцесору ПК КіДиМ надає можливість проведення достатньо повного аналізу кінематики плоскопаралельного руху. Наданий файл вихідних даних дозволяє прослідкувати за змінами у часі основних кінематичних характеристик, ознайомитись із траєкторіями руху характерних точок системи та наочно порівняти ті чи інші кінематичні характеристики. Наприклад, графіки, які наведені на рис. 3.12, дозволяють порівняти зміни у часі швидкостей точок A , B , C , уявити траєкторію точки C (рис. 3.13), зробити висновок, що у деякі моменти часу точка B стає миттєвим центром швидкостей шатуна AB . Також корисною є можливість розглянути залежності швидкості та прискорення деяких точок від кута обертання кривошипа (тобто, фактично, від того, яке положення займає система). Подібні графіки наводяться для точки B на рисунках 3.14 та 3.15. За цими графіками можна зробити висновок, що точка B стає миттєвим центром прискорень, але положення механізму не відповідають тим, при яких вона є миттєвим центром швидкостей.

Крім того, порівнюючи кінематичні характеристики, які обчислені різними способами, ми можемо упевнитись у їх інваріантності.

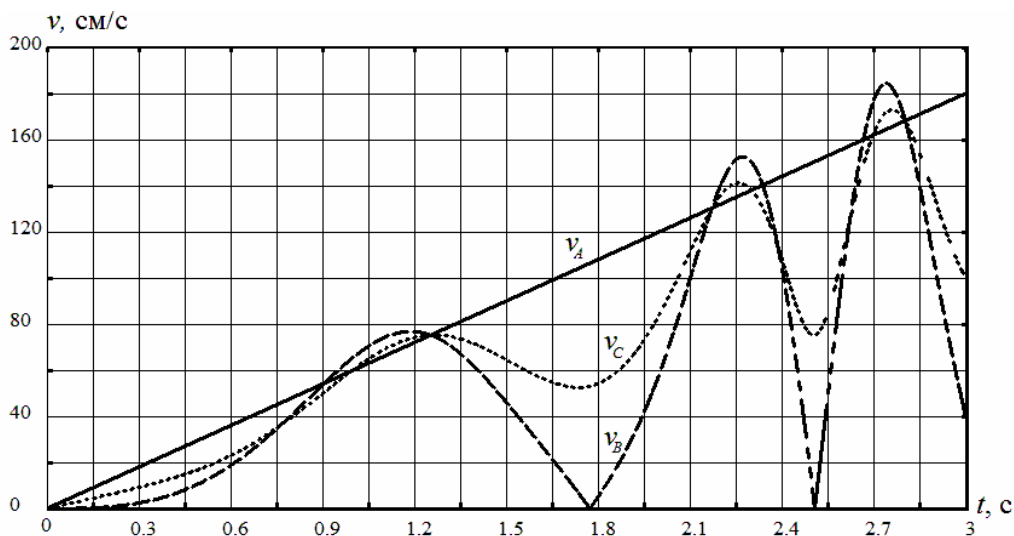


Рисунок 3.12 – Залежність від часу швидкостей точок A , B та C

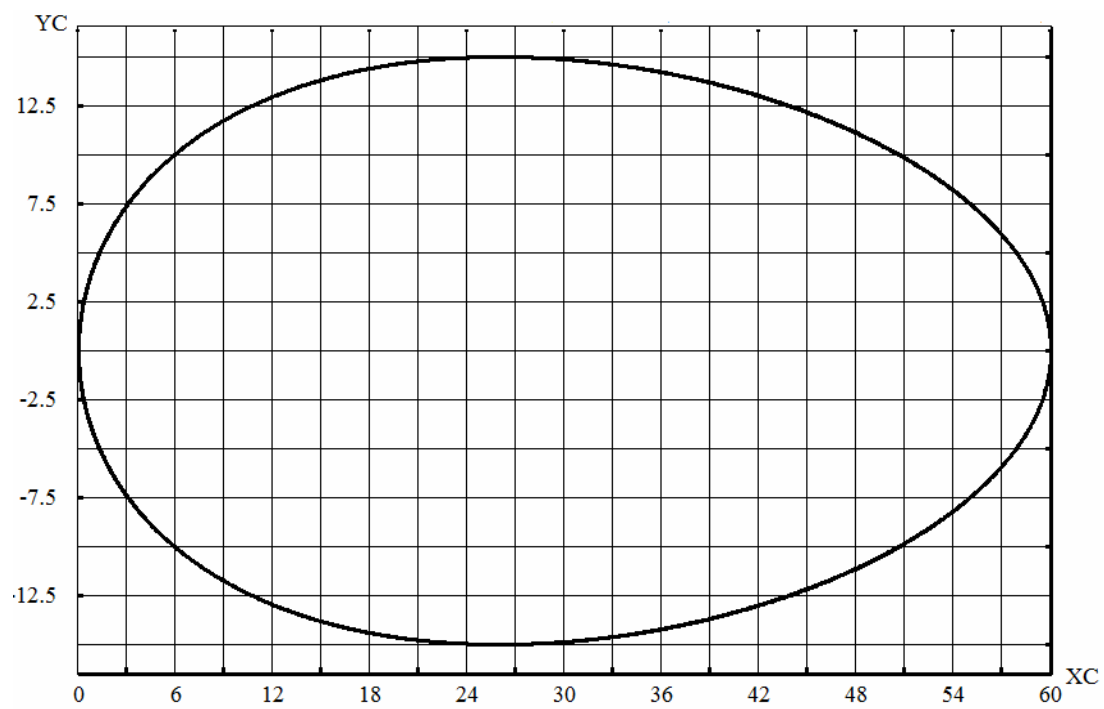


Рисунок 3.13 – Траєкторія точки C

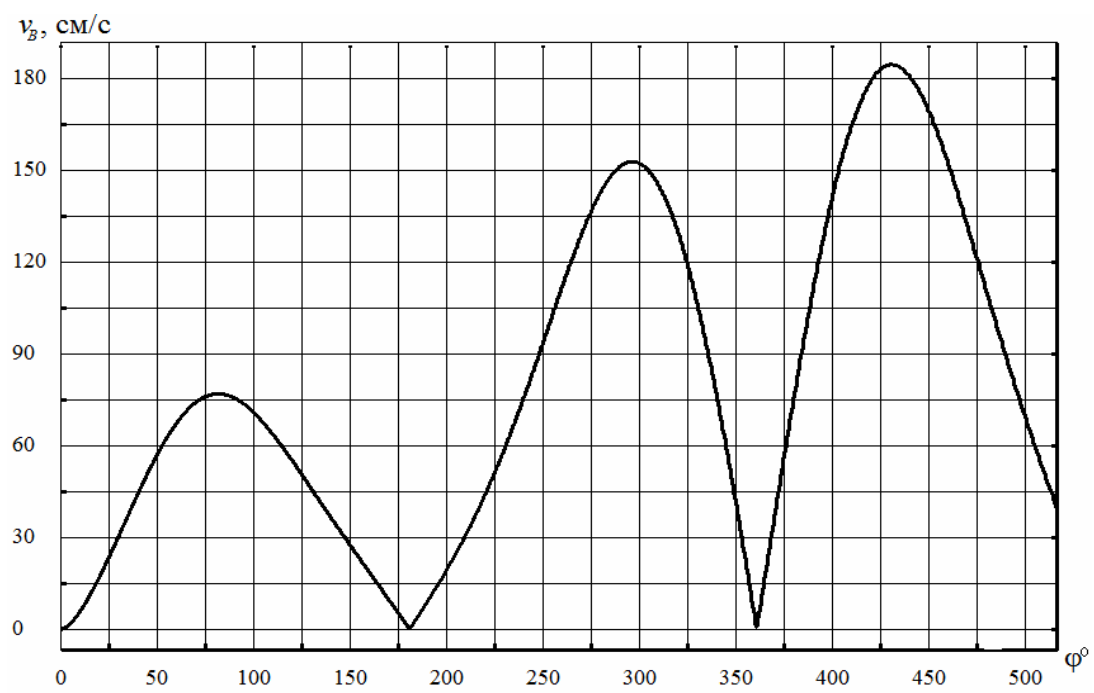


Рисунок 3.14 – Залежність швидкості точки B від кута обертання кривошипа

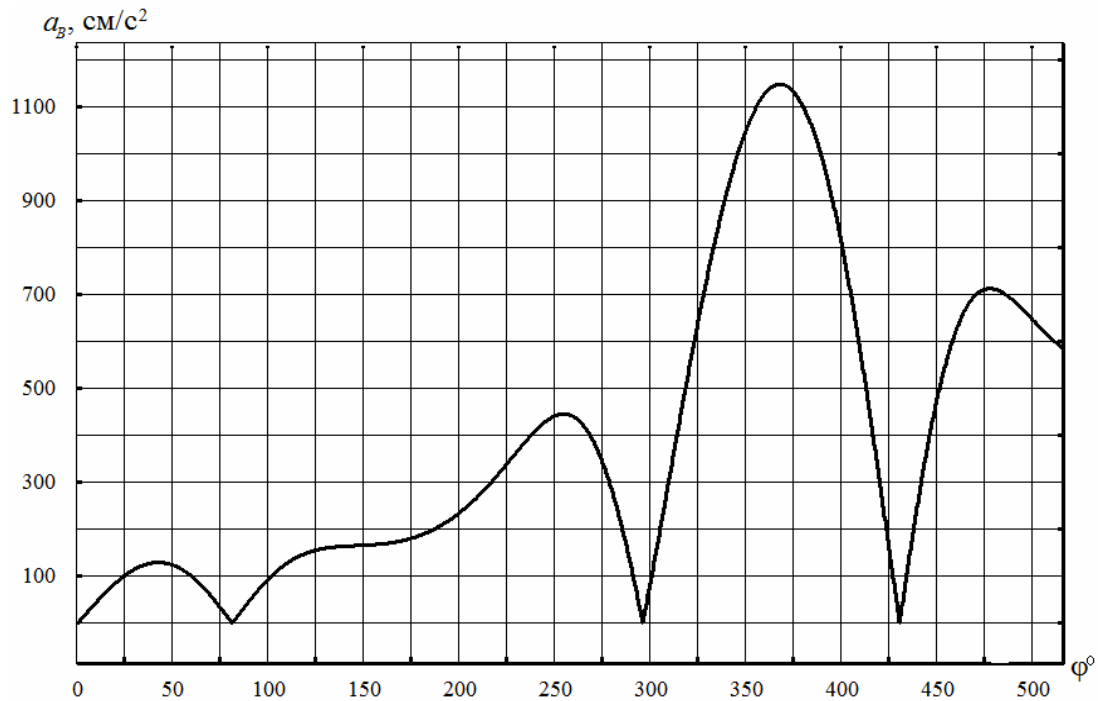


Рисунок 3.15 – Залежність прискорення точки B від кута обертання кривошипа

3.2.4. Завдання для самостійної роботи. У табл. 3.1 і 3.2 запропоновано варіанти розрахункових схем та вихідні дані, згідно з якими необхідно визначити кінематичні характеристики точок та тіл у системі. Вихідними даними є геометричні розміри елементів системи та закон зміни у часі кута обертання φ_{OA} тіла OA (стрілкою вказано позитивний напрям зміни кута обертання).

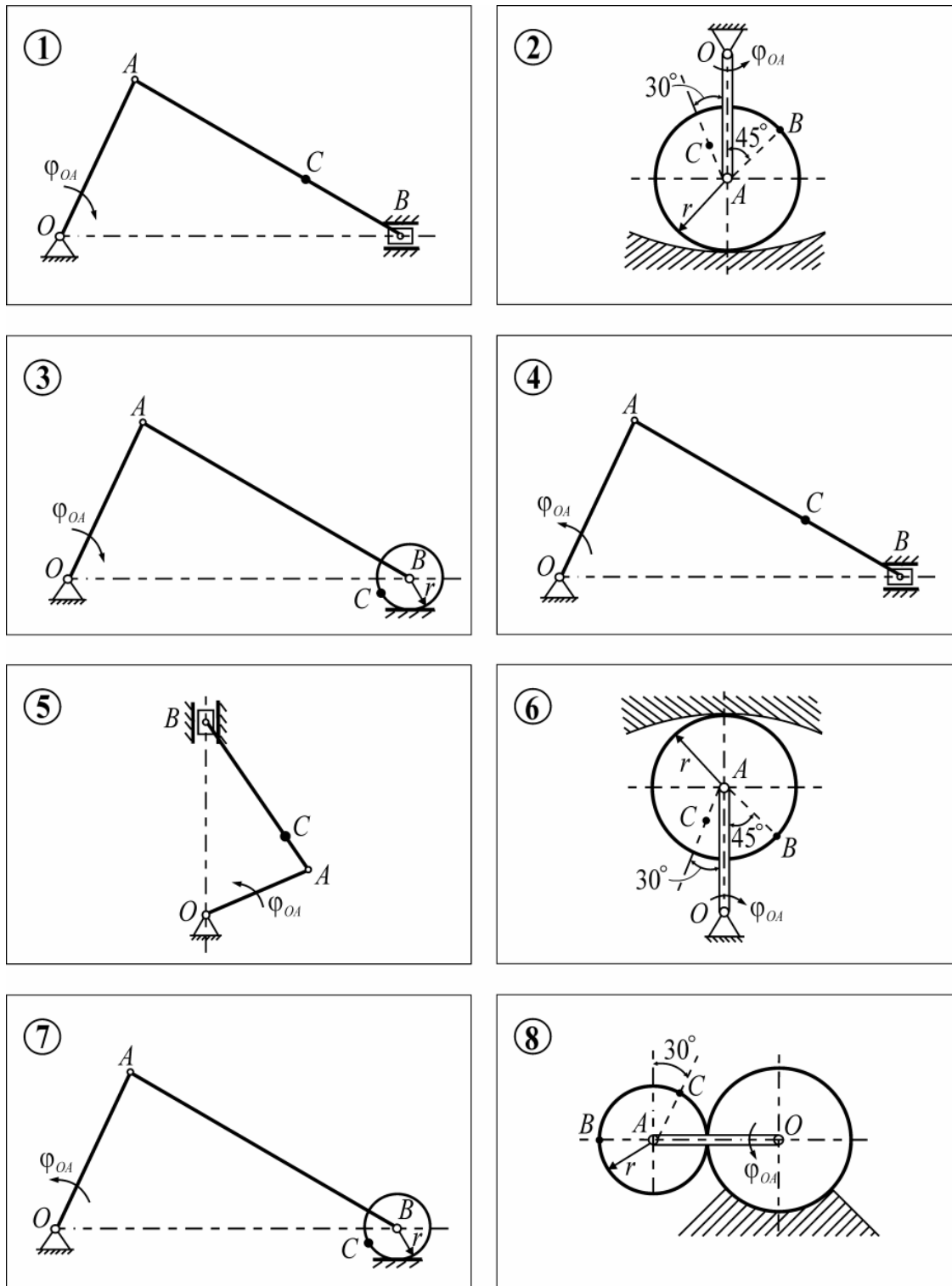
Розв'язок необхідно провести у два етапи: спочатку визначити кінематичні характеристики (швидкість та прискорення точок B та C та кутову швидкість та кутове прискорення тіл системи) аналітично (використовуючи векторні співвідношення кінематики плоскопаралельного руху) для заданого значення φ_* кута обертання тіла OA (для визначення швидкостей можливо використовувати поняття миттєвого центру швидкостей).

Після цього необхідно провести дослідження кінематики запропонованих систем тіл засобами ПК КіДиМ, користуючись текстом файлу вихідних даних, наведеному вище. Розв'язок у ПК КіДиМ можна проводити на часовому інтервалі від 0 до значення часу, яке відповідає якійсь кількості обертань тіла OA (так само, як було показано у

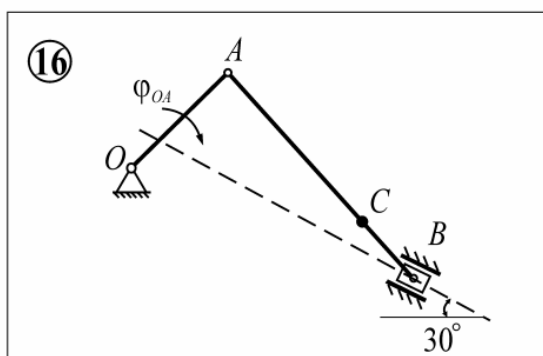
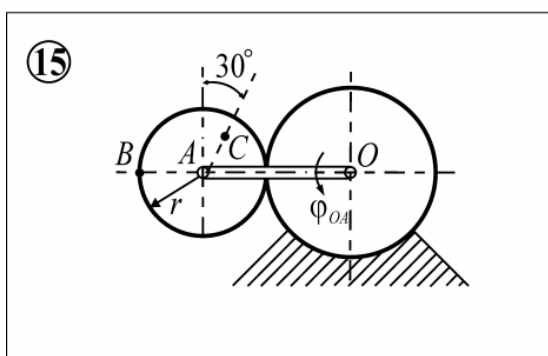
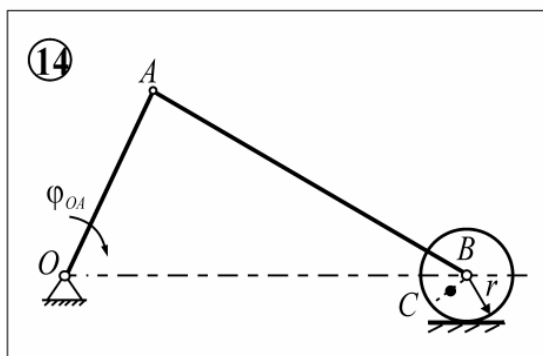
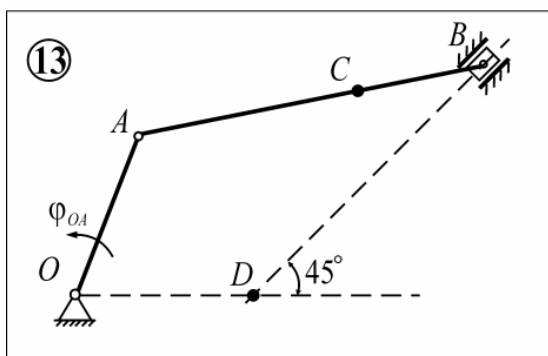
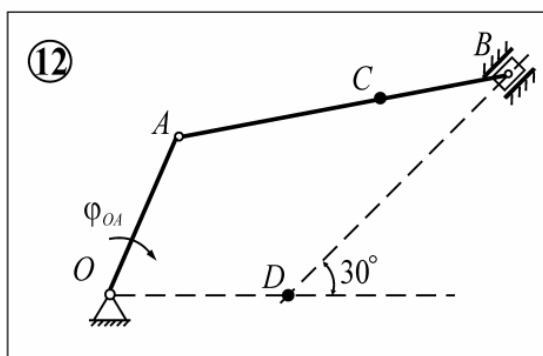
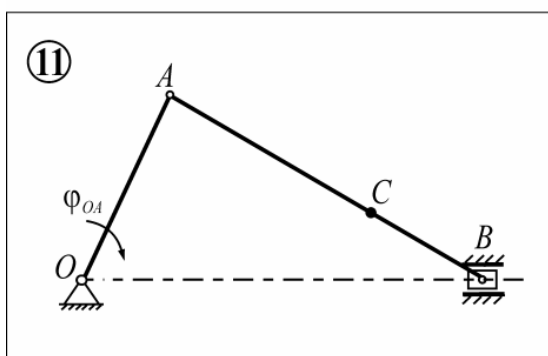
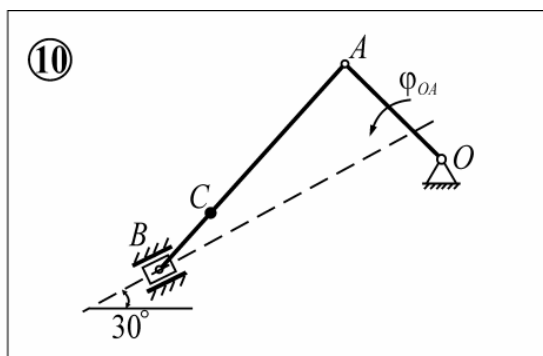
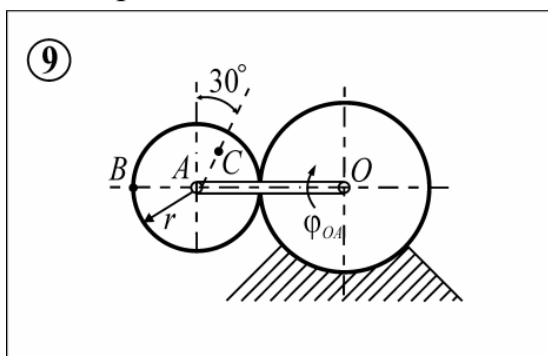
прикладі), або до значення часу, яке відповідає заданому значенню φ кута обертання.

Примітка. У варіантах 1, 3–5, 7, 10–14, 16, 17, 20–23, 25, 30, 31 – система тіл показана у довільному положенні. У варіантах 2, 6, 8, 9, 15, 18, 19, 26, 27, 29 – система тіл показана у початковому положенні. У варіантах 24, 28, 32 – система тіл показана у тому положенні, яке відповідає заданому значенню кута обертання. У варіантах 1–3, 6, 10–12, 14, 16, 17, 19, 28, 31, 32 – кут обертання відлічується від вертикалі. У варіантах 4, 5, 7–9, 13, 15, 18, 20–27, 30 – кут обертання відлічується від горизонталі. У варіанті 29 – кут обертання відлічується від заданого положення OA . У варіантах 4 та 7 – точка C у початковий момент часу є точкою торкання колеса із нерухомою площиною. У варіанті 14 – точка C у початковий момент часу розташована на вертикалі, нижче за точку B .

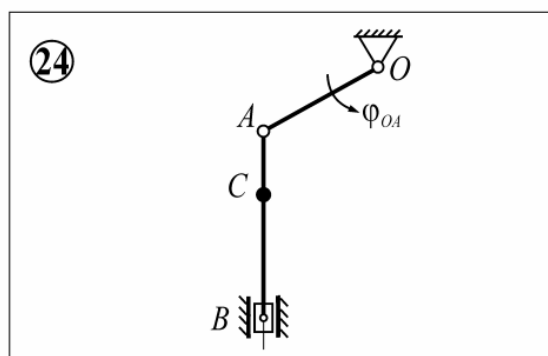
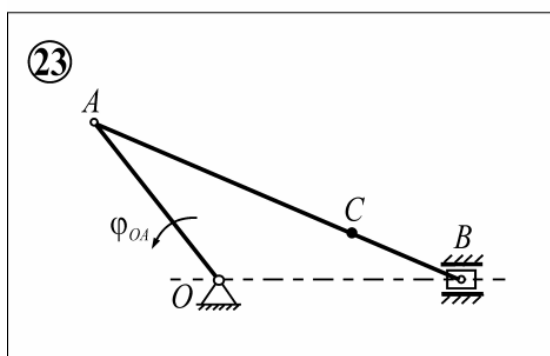
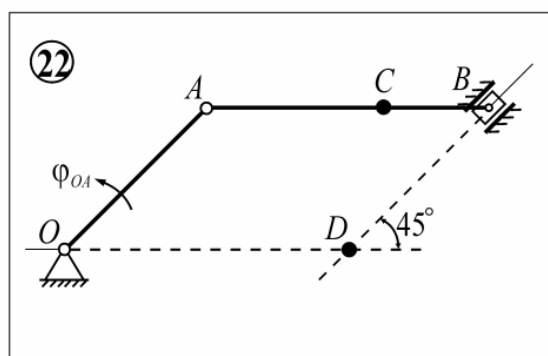
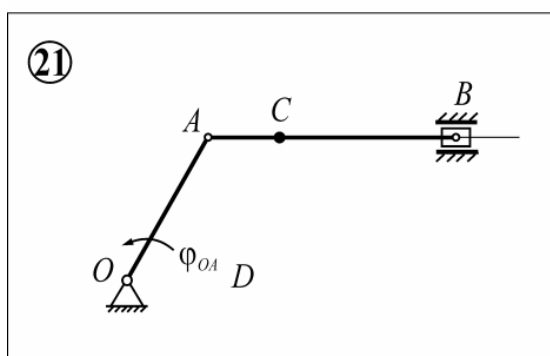
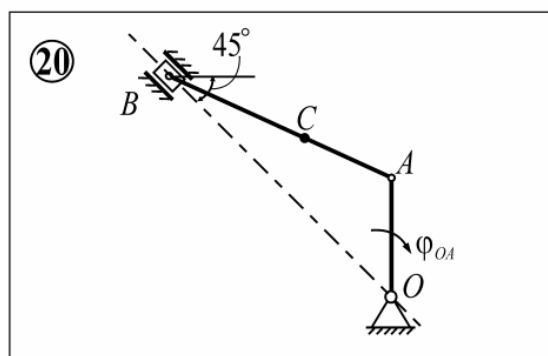
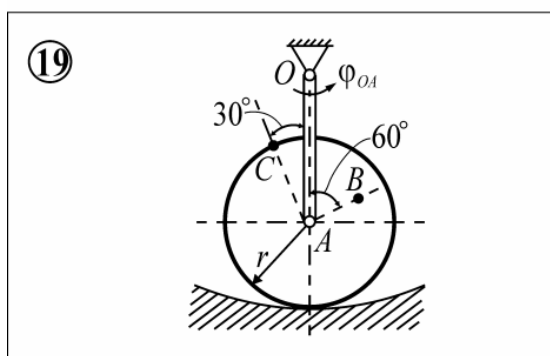
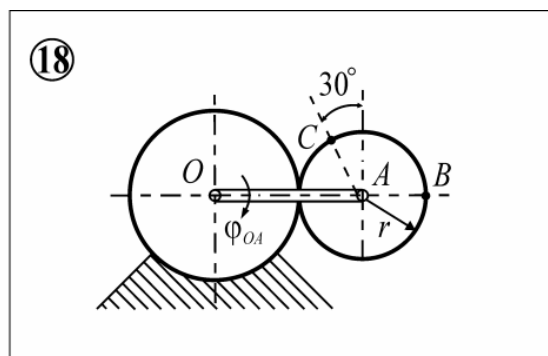
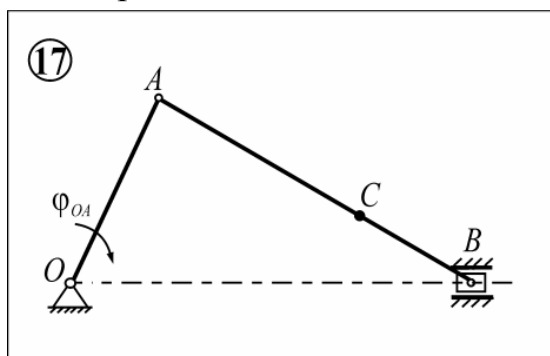
Таблиця 3.1 – Варіанти розрахункових схем для дослідження кінематики плоского руху системи тіл



Продовження табл. 3.1



Продовження табл. 3.1



Таблиця 3.2 – Вихідні дані для визначення кінематичних характеристик системи тіл при плоскопаралельному русі

Номер варіанта	$\varphi_{OA},$ рад	$\varphi_*,$ рад	$OA,$ см	$AB,$ см	$AC,$ см	$BC,$ см	$OD,$ см	$r,$ см
1	$3t - t^2$	$\pi/6$	10	30	20	–	–	–
2	$2 \cos(2t)$	$\pi/4$	12	–	3	–	–	6
3	$3t + 2t^2$	$\pi/3$	14	32	–	–	–	10
4	$3t - 0,5t^2$	$\pi/6$	16	34	25	–	–	–
5	$0,5\pi \sin^2(3t)$	$\pi/2$	18	36	10	–	–	–
6	$2 \cos(1,5t)$	$2\pi/3$	20	–	5	–	–	8
7	$t + t^2$	π	22	38	–	–	–	8
8	$-\pi \sin^2(3t)$	$-\pi/6$	24	–	–	–	–	8
9	$\pi \sin^2(3t)$	$\pi/4$	26	–	5	–	–	10
10	$3t - t^2$	2π	24	40	30	–	–	–
11	$10t - 2t^2$	$-\pi/6$	22	42	35	–	–	–
12	$t + 0,3t^2$	$\pi/2$	20	40	30	–	20	–
13	$3t + 4t^2$	2π	18	38	25	–	18	–
14	$2t + 3t^2$	$\pi/6$	16	36	–	4	–	8
15	$-0,5\pi \sin^2(2t)$	$-\pi/6$	14	–	4	–	–	6
16	$-2t - t^2$	-2π	12	34	28	–	–	–
17	$-3t + t^2$	π	10	32	26	–	–	–
18	$-2\pi/3 \sin^2(2t)$	$-\pi/6$	12	–	–	–	–	4
19	$4 \cos(2t)$	$\pi/4$	14	4	–	–	–	6
20	$0,5\pi \sin^2(t)$	$\pi/4$	16	30	15	–	–	–
21	$13t - 10t^2$	π	18	32	12	–	–	–
22	$4t + 5t^2$	$\pi/4$	20	34	28	–	34	–
23	$3t + 2,5t^2$	$\pi/3$	22	36	30	–	–	–
24	$3t + 1,5t^2$	2π	24	38	14	–	–	–

3.3. Дослідження кінематики складного руху точки

3.3.1. Аналітичні дослідження. Розглянемо квадратну пластину, яка обертається навколо осі, що проходить через нерухому точку O_1 перпендикулярно до площини пластини (рис. 3.16 а). Рух пластини відбувається за законом, рад:

$$\varphi_e = 2t - t^3. \quad (3.19)$$

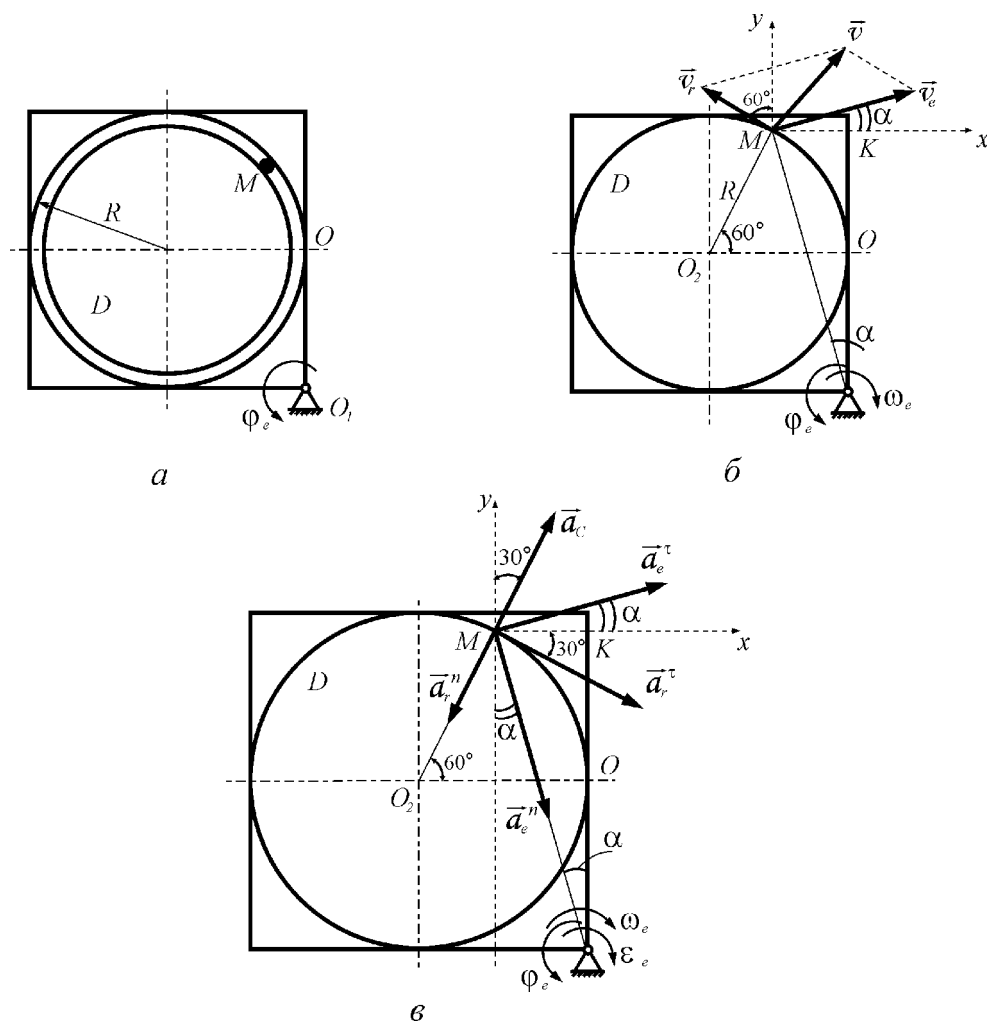


Рисунок 3.16 – Дослідження складного руху точки:

a – розрахункова схема; $б$ – розподіл швидкостей; $в$ – розподіл прискорень

Тут позитивний напрям відліку кута φ_e вказано дуговою стрілкою (див. рис. 3.16 а). Матеріальна точка M рухається вздовж кола радіусом $R = 30\text{см}$, яке вписане у квадрат. Рух точки відбувається за законом, см:

$$OM = s_r = 20\pi \cdot \sin \frac{\pi t}{6}, \quad (3.20)$$

позитивний напрям відліку координати S_r прийнято від точки O до точки M .

Необхідно визначити абсолютну швидкість та абсолютне прискорення точки M в момент часу $t_1 = 1$ с.

Рух точки M розглянемо як складний, вважаючи рух вздовж кола відносним, а обертання пластини – переносним. Спочатку визначимо положення точки M у заданий момент часу, см:

$$s_r(t_1) = OM(t_1) = 10\pi,$$

тоді кут OO_2M дорівнює значенню:

$$\angle OO_2M = \frac{OM}{R} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ.$$

Зобразимо точку M у цьому положенні (рис. 3.16 б і 3.16 в). Відстань O_1M – це радіус кола, яке описує навколо осі обертання саме та точка пластини (або місце пластини), з якою співпадає у заданий момент часу матеріальна точка M . Далі знайдемо деякі допоміжні геометричні величини:

$$MK = R - R \cos 60^\circ = 15 \text{ см}, \quad O_1K = O_1O + OK = \\ = R + R \sin 60^\circ = 55,98 \text{ см};$$

$$O_1M = \sqrt{(O_1K)^2 + (MK)^2} = 57,96 \text{ см};$$

$$\cos \alpha = \frac{O_1K}{O_1M} = 0,966; \quad \sin \alpha = \frac{MK}{O_1M} = 0,259.$$

Для визначення абсолютної швидкості точки M скористаємось теоремою про складання швидкостей у складному русі:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e, \quad (3.21)$$

де \vec{v} – вектор абсолютної швидкості точки M ; \vec{v}_r – вектор відносної швидкості точки M ; \vec{v}_e – вектор переносної швидкості точки M . Алгебраїчне значення відносної швидкості дорівнює:

$$\tilde{v}_r = \frac{ds_r}{dt} = \frac{10}{3} \pi^2 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right);$$

$$t_1 = 1 \text{ c} \Rightarrow \tilde{v}_r = 28,49 \text{ см/с}, \quad v_r = |\tilde{v}_r|.$$

Тут v_r – модуль відносної швидкості. Алгебраїчне значення відносної швидкості є додатним, тобто її вектор спрямований у бік зростання координати S_r (див. рис. 3.16 б). Далі знайдемо модуль переносної швидкості v_e та з'ясуємо напрям її вектора:

$$v_e = \omega_e \cdot O_1M, \quad \omega_e = |\tilde{\omega}_e|;$$

$$\tilde{\omega}_e = \frac{d\phi_e}{dt} = 2 - 3t^2;$$

$$t_1 = 1 \text{ c} \Rightarrow \tilde{\omega}_e = -1 \text{ c}^{-1}, \quad v_e = 57,96 \text{ см/с}.$$

Тут $\tilde{\omega}_e$ і ω_e – алгебраїчне значення та модуль кутової швидкості пластини. Алгебраїчне значення кутової швидкості є від'ємним, тобто пластина обертається у бік, який є протилежним напрямку відліку кута ϕ_e , що показано відповідною дуговою стрілкою ω_e (див. рис. 3.16 б). Вектор переносної швидкості точки M є перпендикулярним до відрізка O_1M і спрямованим у бік обертання пластини. Вектор абсолютної швидкості згідно з (3.21) зображено відповідно до правил складання векторів (див. рис. 3.16 б), його модуль визначимо шляхом розкладання векторів по осях декартової системи координат:

$$v = (v_x, v_y), \quad v_r = (v_{rx}, v_{ry}), \quad v_e = (v_{ex}, v_{ey}),$$

$$v_x = v_{rx} + v_{ex} = -v_r \cdot \cos 30^\circ + v_e \cdot \cos \alpha \approx 31,31 \text{ см/с},$$

$$v_y = v_{ry} + v_{ey} = -v_r \cdot \sin 30^\circ + v_e \cdot \sin \alpha \approx 29,25 \text{ см/с},$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \approx 42,84 \text{ см/с}.$$

Для визначення абсолютного прискорення точки M скористаємось теоремою про складання прискорень у складному русі (теоремою Коріоліса):

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c, \quad (3.22)$$

де \vec{a} – вектор абсолютного прискорення; \vec{a}_r – вектор відносного прискорення; \vec{a}_e – вектор переносного прискорення; \vec{a}_c – вектор прискорення Коріоліса точки M . Внаслідок того, що відносний та переносний рухи точки M не є прямолінійними, формулу (3.22) доцільно записати у розгорнутому вигляді:

$$\vec{a} = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_e^{\text{до}} + \vec{a}_e^{\text{об}} + \vec{a}_c, \quad (3.23)$$

де \vec{a}_r^n – вектор відносного нормального прискорення; \vec{a}_r^τ – вектор відносного дотичного (тангенційного) прискорення; $\vec{a}_e^{\text{до}}$ – вектор переносного доосьового прискорення; $\vec{a}_e^{\text{об}}$ – вектор переносного обертального прискорення точки M . Вектор відносного нормального прискорення завжди спрямований від точки M до центра кривини відносної траєкторії – точки O_2 (див. рис. 3.16 в), а його модуль дорівнює значенню:

$$a_r^n = \frac{v_r^2}{R} \approx 27,06 \text{ см/с}^2.$$

Далі знаходимо алгебраїчне значення відносного дотичного прискорення \tilde{a}_r та його модуль a_r :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_r &= \frac{d\tilde{v}_r}{dt} = -\frac{5}{9}\pi^3 \sin \frac{\pi t}{6}; \\ t_1 = 1\text{с} &\Rightarrow \tilde{a}_r = -8,61 \text{ см/с}^2, \quad a_r = |\tilde{a}_r|. \end{aligned}$$

Алгебраїчне значення відносного дотичного прискорення є від'ємним, таким чином, вектор відносного дотичного прискорення спрямований, на відміну від вектора відносної швидкості, у бік зменшення відносної координати S_r (див. рис. 3.16 в).

Вектор переносного доосьового прискорення завжди спрямований до центра кривини переносної траєкторії – точки O_1 (див. рис. 3.19 в), а його модуль дорівнює значенню:

$$a_e^{\text{до}} = \omega_e^2 \cdot O_1M \approx 57,96 \text{ см/с}^2.$$

Модуль переносного обертального прискорення $a_e^{\text{об}}$ визначимо таким чином:

$$a_e^{\text{об}} = \varepsilon_e \cdot O_1M, \quad \varepsilon_e = |\tilde{\varepsilon}_e|;$$

$$\tilde{\varepsilon}_e = \frac{d\omega_e}{dt} = -6t;$$

$$t_1 = 1 \text{ с} \Rightarrow \tilde{\varepsilon}_e = -6 \text{ с}^{-2}, a_e^{\text{об}} = 347,73 \text{ см/с}^2.$$

Тут $\tilde{\varepsilon}_e$ і $\varepsilon_e \omega_e$ – алгебраїчне значення та модуль переносного кутового прискорення пластини. Алгебраїчне значення переносного кутового прискорення є від’ємним, таким чином, вектори $\vec{\omega}_e$ та $\vec{\varepsilon}_e$ спрямовані в один й той самий бік і переносний рух точки M є прискореним. Вектор переносного обертального прискорення спрямований так само, як і вектор переносної швидкості (див. рис. 3.16 в). Вектор прискорення Кориоліса та його модуль визначають таким чином:

$$\vec{a}_c = 2 \cdot [\vec{\omega}_e, \vec{v}_r]; \quad a_c = 2 \cdot \omega_e \cdot v_r \cdot \sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r). \quad (3.24)$$

Внаслідок того, що відносний рух точки відбувається у площині, перпендикулярній до осі переносного обертання, то $\sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = \sin 90^\circ = 1$. Згідно з формулою (3.24) одержимо, що $a_c = 56,98 \text{ см/с}^2$. Модуль абсолютного прискорення точки M визначимо шляхом проектування векторної рівності (3.23) на осі декартової системи координат:

$$\begin{aligned}
a_x &= a_{rx}^n + a_{rx}^\tau + a_{ex}^{до} + a_{ex}^{об} + a_{cx} = -a_r^n \cdot \cos 60^\circ + \\
&+ a_r^\tau \cdot \cos 30^\circ + a_e^{до} \cdot \sin \alpha + a_e^{об} \cos \alpha + \\
&+ a_c \cdot \cos 60^\circ \approx 358,39 \text{ см/с}^2; \\
a_y &= a_{ry}^n + a_{ry}^\tau + a_{ey}^{до} + a_{ey}^{об} + a_{cy} = -a_r^n \cdot \sin 60^\circ - \\
&- a_r^\tau \cdot \sin 30^\circ - a_e^{до} \cdot \cos \alpha + a_e^{об} \sin \alpha + \\
&+ a_c \cdot \sin 60^\circ \approx 64,24 \text{ см/с}^2; \\
a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \approx 364,1 \text{ см/с}^2.
\end{aligned}$$

Таким чином, використовуючи векторні співвідношення теорії складного руху точки, можна визначили абсолютну швидкість та абсолютне прискорення точки, що рухається уздовж пластини, яка, в свою чергу, обертається навколо нерухомої осі.

3.3.2. Комп'ютерне моделювання складного руху точки. Для комп'ютерного моделювання складного руху точки скористаємося засобами ПК КіДиМ. Так само, як і у випадку із дослідженням плоскопаралельного руху, необхідно задати закон руху точки M згідно з координатним способом. Для цього розглянемо рух цієї точки відносно двох координатних систем (рис. 3.17).

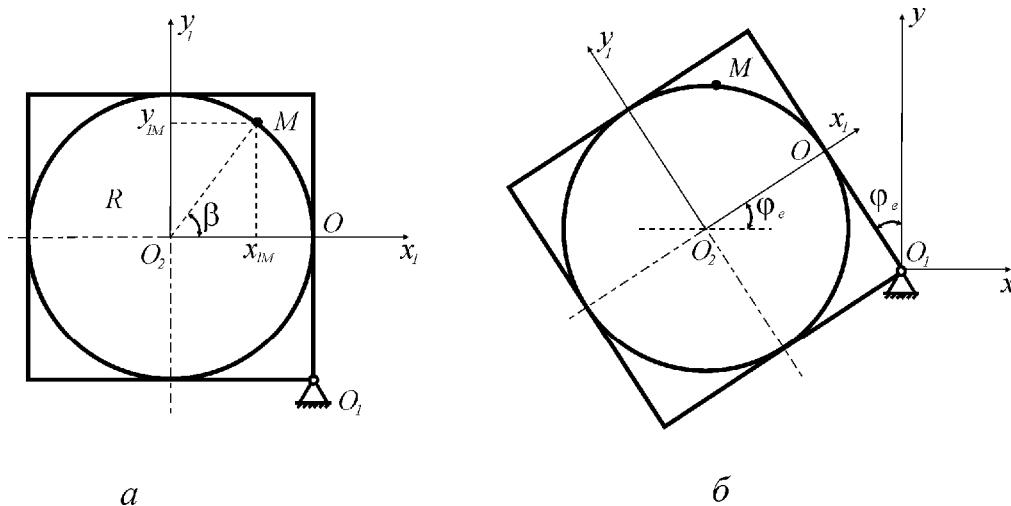


Рисунок 3.17 – Визначення закону руху точки M в системах координат:
 a – рухомій; $б$ – нерухомій

У координатній системі $x_1O_2y_1$, яка жорстко пов'язана із пластинною, закон руху точки M має такий вигляд:

$$x_{1M} = R \cdot \cos \beta, \quad y_{1M} = R \cdot \sin \beta, \quad \beta = \frac{OM}{R} = \frac{s_r}{R}. \quad (3.25)$$

Закон руху точки M у нерухомій системі координат xO_1y можна одержати, якщо розглянути пластину, розгорнуту на кут φ_e , та скористатися формулами перетворення у координатних системах:

$$\begin{aligned} x_M &= (x_{1M} - R) \cdot \cos \varphi_e - (y_{1M} + R) \cdot \sin \varphi_e; \\ y_M &= (x_{1M} - R) \cdot \sin \varphi_e + (y_{1M} + R) \cdot \cos \varphi_e. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Тепер можна використовувати формули (3.1) для визначення швидкості точки M у нерухомій системі координат xO_1y (абсолютної швидкості) та формули (3.4) для визначення абсолютного прискорення.

Також можна визначити кінематичні характеристики руху точки за допомогою векторного способу, використовуючи формули, які аналогічні формулам (3.21) та (3.22). Для цього необхідно визначити вектори, які входять у ці залежності, через проекції у нерухомій системі координат xO_1y . Так, проекції вектора відносної швидкості (v_{rx}, v_{ry}) спочатку визначаємо у рухомій координатній системі $x_1O_2y_1$, а потім перераховуємо їх у нерухому систему координат:

$$\begin{aligned} v'_{rx} &= \dot{x}_{1M}; \quad v'_{ry} = \dot{y}_{1M}; \\ v_{rx} &= v'_{rx} \cdot \cos \varphi_e - v'_{ry} \cdot \sin \varphi_e; \\ v_{ry} &= v'_{rx} \cdot \sin \varphi_e + v'_{ry} \cdot \cos \varphi_e. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Проекції вектора відносної швидкості (v_{ex}, v_{ey}) одразу визначаємо у нерухомій системі координат:

$$\begin{aligned} \vec{v}_e &= [\vec{\omega}, \vec{r}]; \quad \vec{\omega} = (0, 0, \omega_e); \quad \omega_e = \dot{\varphi}_e; \quad \vec{r} = (x_M, y_M, 0); \\ v_{ex} &= -\omega_e \cdot y_M; \quad v_{ey} = \omega_e \cdot x_M, \end{aligned} \quad (3.28)$$

де \vec{r} – радіус-вектор точки у нерухомій системі координат. Також можна визначити модулі відносної (v_r) та переносної (v_e) швидкості:

$$v_r = \sqrt{v_{rx}^2 + v_{ry}^2}; \quad v_e = \sqrt{v_{ex}^2 + v_{ey}^2}. \quad (3.29)$$

Після чого можна визначати абсолютну швидкість точки у векторний спосіб:

$$\begin{aligned} v_x^{\text{вект}} &= v_{rx} + v_{ex}; & v_y^{\text{вект}} &= v_{ry} + v_{ey}; \\ v^{\text{вект}} &= \sqrt{\left(v_x^{\text{вект}}\right)^2 + \left(v_y^{\text{вект}}\right)^2}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Подібним чином визначаємо проекції та модулі відносного прискорення у рухомій (a'_{rx}, a'_{ry}) та нерухомій системах координат (a_{rx}, a_{ry}, a_r) , переносного прискорення (a_{ex}, a_{ey}, a_e) , прискорення Коріоліса (a_{cx}, a_{cy}, a_c) та абсолютного прискорення точки $(a^{\text{вект}})$:

$$\begin{aligned} a'_{rx} &= \ddot{x}_{1M}; & a'_{ry} &= \ddot{y}_{1M}; \\ a_{rx} &= a'_{rx} \cdot \cos \varphi_e - a'_{ry} \cdot \sin \varphi_e; & a_{ry} &= a'_{rx} \cdot \sin \varphi_e + a'_{ry} \cdot \cos \varphi_e; \\ a_r &= \sqrt{\left(a_{rx}\right)^2 + \left(a_{ry}\right)^2}; \\ \vec{a}_e &= \vec{a}_e^{\text{об}} + \vec{a}_e^{\text{до}}; & \vec{a}_e^{\text{об}} &= [\vec{\varepsilon}, \vec{r}]; & \vec{a}_e^{\text{до}} &= [\vec{\omega}, \vec{v}_e]; \\ \vec{\varepsilon} &= (0, 0, \varepsilon_e); & \varepsilon_e &= \ddot{\varphi}_e; \\ a_{ex}^{\text{об}} &= -\varepsilon_e \cdot y_M; & a_{ey}^{\text{об}} &= \varepsilon_e \cdot x_M; & a_{ex}^{\text{до}} &= -\omega_e \cdot v_{ey}; & a_{ey}^{\text{до}} &= \omega_e \cdot v_{ex}; \\ a_{ex} &= -\varepsilon_e \cdot y_M - \omega_e \cdot v_{ey}; & a_{ey} &= \varepsilon_e \cdot x_M + \omega_e \cdot v_{ex}; \\ a_e &= \sqrt{\left(a_{ex}\right)^2 + \left(a_{ey}\right)^2}; \\ \vec{a}_c &= 2[\vec{\omega}, \vec{v}_r]; & a_{cx} &= -2\omega_e \cdot v_{rx}; & a_{cy} &= 2\omega_e \cdot v_{ry}; \\ a_c &= \sqrt{\left(a_{cx}\right)^2 + \left(a_{cy}\right)^2}; \\ a_x^{\text{вект}} &= a_{rx} + a_{ex} + a_{cx}; & a_y^{\text{вект}} &= a_{ry} + a_{ey} + a_{cy}; \\ a^{\text{вект}} &= \sqrt{\left(a_x^{\text{вект}}\right)^2 + \left(a_y^{\text{вект}}\right)^2}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Тепер складемо файл вихідної інформації для ПК КіДиМ, у якому визначемо кінематичні характеристики складного руху точки у координатний та векторний спосіб, а потім порівняємо одержані результати.

Текст файлу

РАБОТА:= №2.2 Моделювання складного руху точки;

```

ВЫПОЛНИЛ:= студент Іванов П.С., гр. І-10а;

# Завдання законів руху точки та пластини #
Sr=20*pi*sin(pi*t/6); fie=2*t-t^3; R=30; tk=1; alfa=Sr/R;
xr=R*cos(alfa); yr=R*sin(alfa);
XM=(xr-R)*cos(fie)-(yr+R)*sin(fie);
YM=(xr-R)*sin(fie)+(yr+R)*cos(fie);

# Визначення кінематичних характеристик у координатний
# спосіб #
VMX=XM't; VMY=YM't; VM=sqrt(VMX^2+VMY^2);
AMX=VMX't; AMY=VMY't; AM=sqrt(AMX^2+AMY^2);

# Визначення кінематичних характеристик у векторний спосіб
#
omega=fie't; epsilon=fie't't; Vrx=xr't; Vry=yr't;
VrX=Vrx*cos(fie)-Vry*sin(fie);
VrY=Vrx*sin(fie)+Vry*cos(fie); Vr=sqrt(VrX^2+VrY^2);
VeX=-omega*YM; VeY=omega*XM; Ve=sqrt(VeX^2+VeY^2);
VvX=VrX+VeX; VvY=VrY+VeY; VvM=sqrt(VvX^2+VvY^2);
Arx=Vrx't; Ary=Vry't;
ArX=Arx*cos(fie)-Ary*sin(fie);
ArY=Arx*sin(fie)+Ary*cos(fie); Ar=sqrt(ArX^2+ArY^2);
AeX=-epsilon*YM-omega*VeY;
AeY=epsilon*XM+omega*VeX; Ae=sqrt(AeX^2+AeY^2);
AcX=-2*omega*VrY; AcY=2*omega*VrX;
Ac=sqrt(AcX^2+AcY^2); Acor=2*abs(omega)*Vr;
AvX=ArX+AeX+ AcX;AvY=ArY+AeY+AcY; AvM=sqrt(AvX^2+AvY^2);

# Інструкції до виконання завдання #
ВАРЬИРОВАТЬ:=t,0,tk;
ПОКАЗАТЬ:=VM,AM,xr(yr),omega,epsilon,YM(XM),Sr,fie;
СРАВНИТЬ:=V(VM,Vr,Ve),V1(VM,VvM),A(AM,Ar,Ae),A1(AM,AvM),
A2(Ac,Acor);
РАСЧЕТ:=КИНЕМАТИКА;
КОНЕЦ;

```

Прийняті у тексті файлу позначення можуть бути розшифровані таким чином: **Sr** – закон зміни у часі дугової координати точки *M* уздовж відносної траєкторії (відповідно до формули (3.20)); **fie** – закон зміни у часі кута обертання пластини (відповідно до формули (3.19)); **xr** та **yr** – декартові координати точки *M* у рухомій (відносній)

системі відліку (відповідно до формул (3.25)); \mathbf{xM} , \mathbf{yM} – декартові координати точки M у нерухомій (абсолютній) системі відліку (відповідно до формул (3.26)); \mathbf{vMx} , \mathbf{vMy} та \mathbf{vM} – проекції та модуль абсолютної швидкості (відповідно до формул (3.1)); \mathbf{aMx} , \mathbf{aMy} та \mathbf{aM} – проекції та модуль абсолютного прискорення (відповідно до формул (3.4)); \mathbf{vrX} , \mathbf{vrY} та \mathbf{vr} – проекції та модуль відносної швидкості (відповідно до формул (3.27) та (3.29)); ω – кутова швидкість пластини; ϵ – кутове прискорення пластини; \mathbf{vex} , \mathbf{vey} та \mathbf{ve} – проекції та модуль переносної швидкості (відповідно до формул (3.28) та (3.29)); \mathbf{vvX} , \mathbf{vvY} та \mathbf{vvM} – проекції та модуль абсолютної швидкості точки M , визначеної у векторний спосіб (відповідно до формул (3.30)); \mathbf{arX} , \mathbf{arY} та \mathbf{ar} – проекції та модуль відносного прискорення (відповідно до формул (3.31)); \mathbf{aex} , \mathbf{aey} та \mathbf{ae} – проекції та модуль переносного прискорення т. M (відповідно до формул (3.31)); \mathbf{acX} , \mathbf{acY} та \mathbf{ac} – проекції та модуль прискорення Коріоліса точки M (відповідно до формул (3.31)); \mathbf{acor} – модуль прискорення Коріоліса точки M (відповідно до формули (3.24)); \mathbf{avX} , \mathbf{avY} та \mathbf{avM} – проекції та модуль абсолютного прискорення точки M , визначеного у векторний спосіб (відповідно до формул (3.31)).

Результати роботи постпроцесору ПК КіДиМ, які представляються у вигляді графіків та таблиць, надають можливість проведення різнобічного аналізу складного руху точки. Також, використовуючи інструкцію «**СПРАВНИТЬ**», можна встановити ідентичність змін у часі основних кінематичних характеристики руху точки, визначених різними способами (у даному випадку – координатним та векторним), тобто перевірити інваріантність швидкості та прискорення.

Можна ознайомитись із траєкторією руху точки у рухомій та нерухомій системах координат – на рис. 3.18 представлено абсолютну траєкторію т. M , тобто траєкторію у нерухомій системі координат.

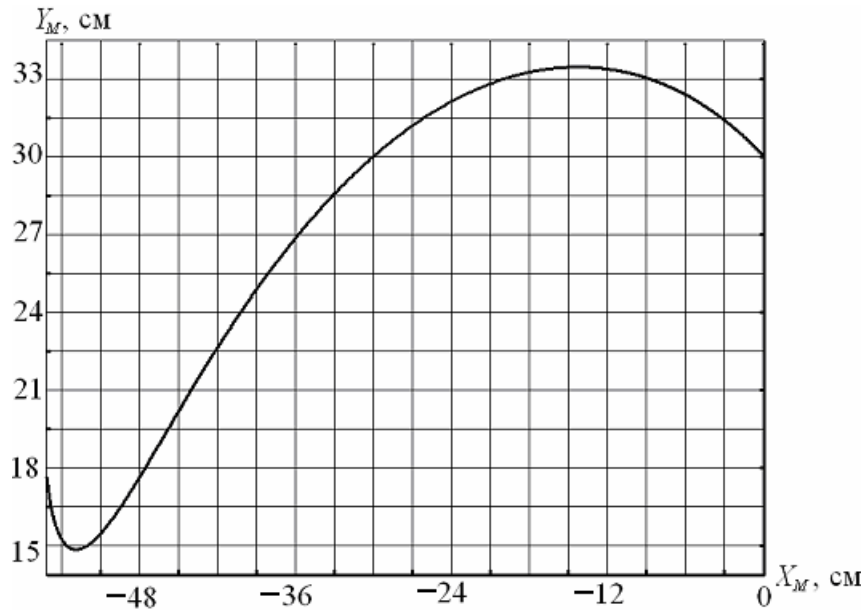


Рисунок 3.18 – Абсолютна траєкторія точки M

За графіками, які наведено на рис.3.19 та 3.20 можна, по-перше, перевірити значення швидкостей та прискорень, що були знайдені аналітично, а по-друге, який з рухів – відносний чи переносний – більше впливає на абсолютний рух точки M . У даному випадку більший вплив спостерігається з боку переносного руху.

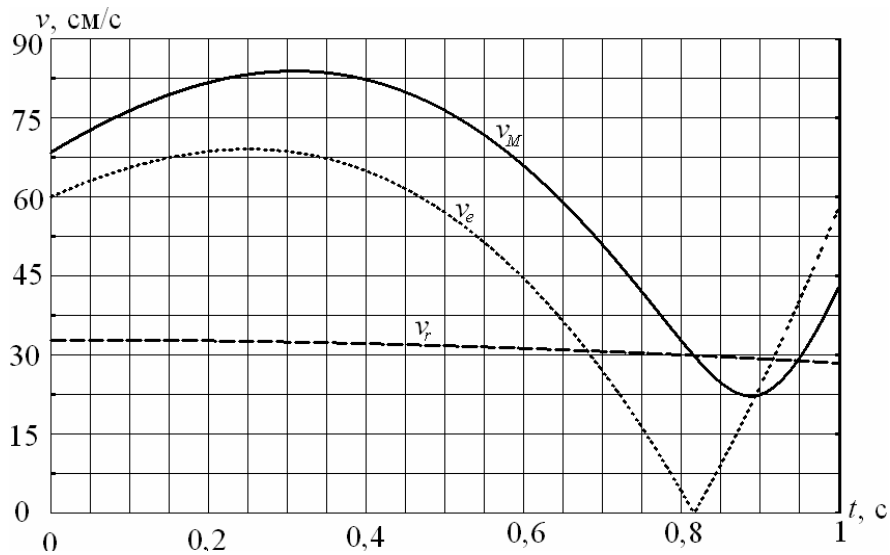


Рисунок 3.19 – Порівняння абсолютної v_M , переносної v_e та відносної v_r швидкості точки M

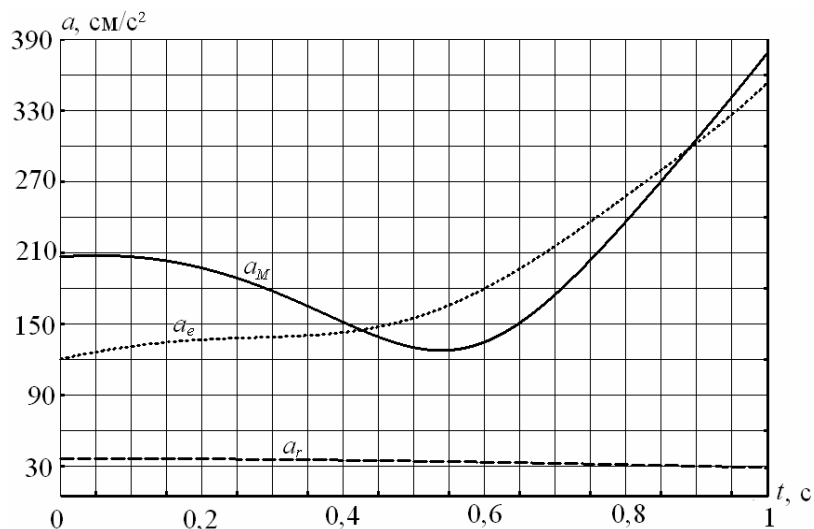


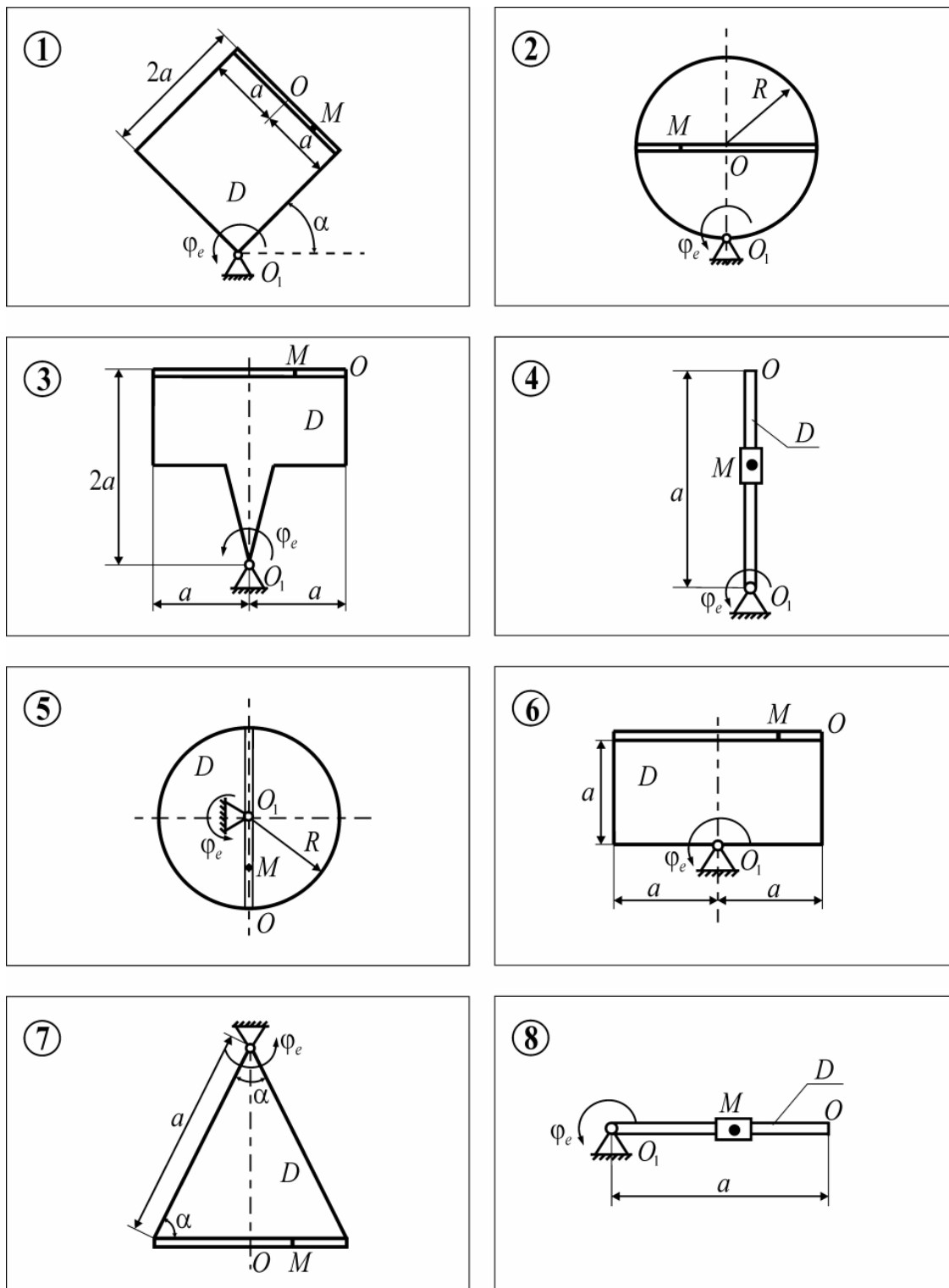
Рисунок 3.20 – Порівняння абсолютного a_M , переносного a_e та відносного a_r прискорення точки M

3.3.3. Завдання для самостійної роботи. У табл. 3.3 і 3.4 запропоновано варіанти розрахункових схем та вихідні дані, згідно з якими необхідно визначити кінематичні характеристики точки M при складному русі разом із тілом D . У початковий момент часу тіло D (пластина) із стану спокою розпочинає обертальний рух навколо осі, яка проходить через точку O_1 перпендикулярно до площини рисунка, водночас точка M розпочинає рухатись відносно тіла по заздалегідь відомій траєкторії.

Розв'язок необхідно провести у два етапи: спочатку визначити кінематичні характеристики точки M аналітично (використовуючи векторні співвідношення кінематики складного руху) для заданого моменту часу t_* . Після цього необхідно провести дослідження кінематики складного руху точки засобами ПК КіДиМ, користуючись текстом файлу вихідних даних, наведеному у табл. 3.4. Розв'язок у ПК КіДиМ можна проводити на часовому інтервалі від нуля до заданого значення часу або, обираючи часовий інтервал відповідно до кількості обертів пластини.

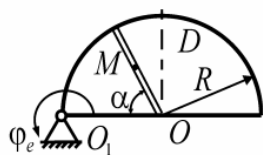
Примітка. У варіантах 1, 8 та 31 – тіло D показано у початковому положенні, в усіх інших варіантах – у довільному. Точка O – початок відліку уздовж відносної траєкторії, точка M в усіх варіантах показана зрушеною у позитивному напрямі уздовж відносної траєкторії.

Таблиця 3.3 – Варіанти розрахункових схем для визначення кінематичних характеристик руху точки M

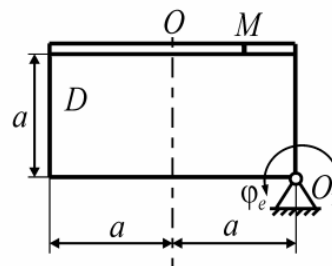


Продовження табл. 3.3

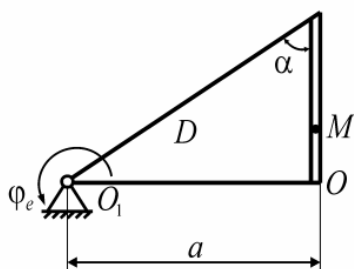
⑨



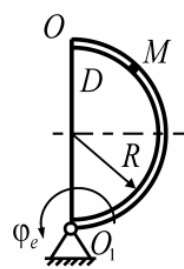
⑩



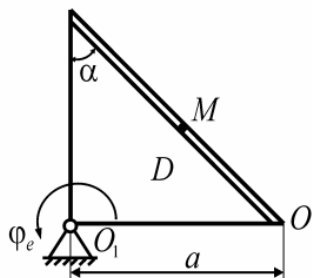
⑪



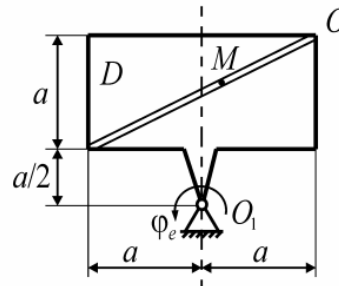
⑫



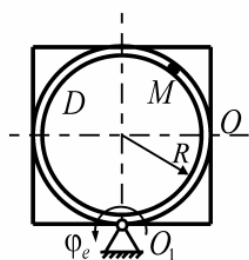
⑬



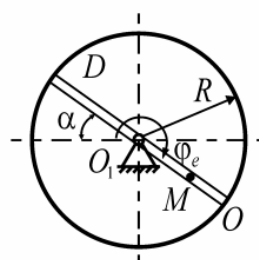
⑭



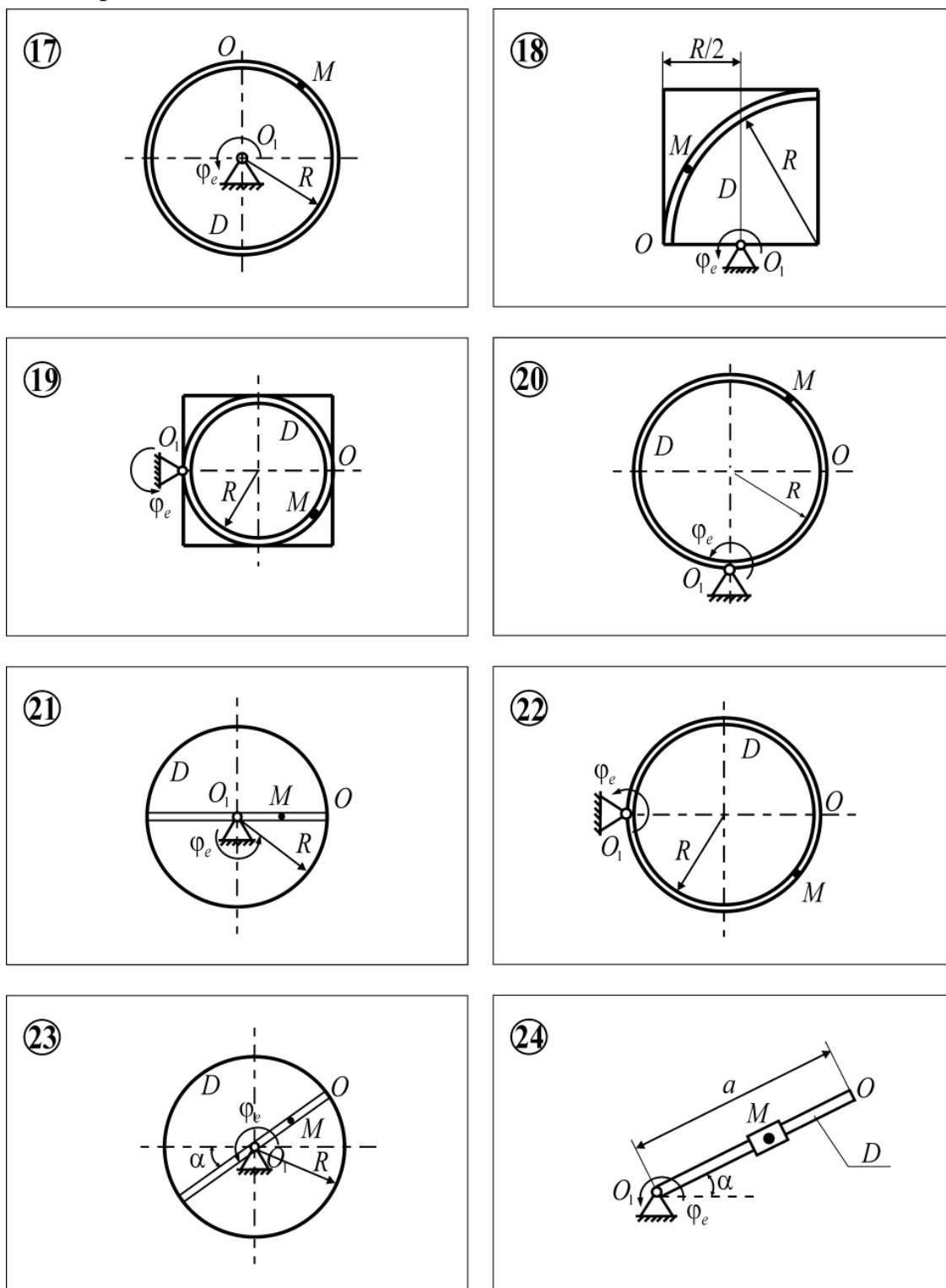
⑮



⑯



Продовження табл. 3.3



Таблиця 3.4 – Вихідні дані для моделювання складного руху

Номер варіанта	φ_e , рад	S_r , см	a , см	R , см	α , рад	t_* , с
1	$0,3t + 0,5t^2$	$10\sin(2t)$	10	—	$\pi/4$	3,25
2	$0,1t + t^2$	$15\sin(3t)$	—	15	—	2,46
3	$t - 0,2t^2$	$28\sin^2(2t)$	14	—	—	3,64
4	$t + 0,3t^2$	$16\sin^2(t)$	16	—	—	3,2
5	$t + 0,4t^2$	$72\sin^2(t)$	—	36	—	2,91
6	$0,2t + 0,3t^2$	$40\sin^2(t)$	20	—	—	4,25
7	$0,2t + 0,9t^2$	$11\cos(t)$	22	—	$\pi/3$	2,53
8	$0,1t - 0,5t^2$	$26\sin^2(0,8t)$	26	—	—	3,45
9	$t + 0,2t^2$	$40\sin^2(0,3t)$	—	40	$\pi/3$	3,63
10	$0,3t + 0,2t^2$	$22\sin(t)$	22	—	—	4,91
11	$t^3 + 0,6t^2$	$10\sin^2(t)$	18	—	$\pi/3$	2,51
12	$3t + 0,1t^2$	$70\sin^2(2,3t)$	—	36	—	1,97
13	$t + t^2$	$16\sin^2(1,8t)$	14	—	$\pi/4$	3,6
14	$0,3t + 0,4t^2$	$22\sin^2(0,2t)$	10	—	—	3,61
15	$0,4t + 0,2t^2$	$70\cos(2,5t)$	—	30	—	1,1
16	$2t + t^2$	$28\sin^2(0,3t)$	—	14	$\pi/6$	1,3
17	$0,3t + 0,2t^2$	$100\cos(t)$	—	32	—	1,6
18	$4t + 5t^2$	$40\sin^2(0,4t)$	—	34	—	1,8
19	$3t + 0,2t^2$	$45\sin(2,5t)$	—	36	—	2
20	$0,3t + 0,7t^2$	$50\sin(1,5t)$	—	38	—	0,8
21	$-4t^3 - 2t^2$	$90\sin^2(3,6t)$	—	45	—	1
22	$0,1t + 0,9t^2$	$95\sin(0,7t)$	—	35	—	1,1
23	$t + 0,5t^2$	$34\sin^2(1,8t)$	—	17	$\pi/6$	1,5
24	$0,4t + t^2$	$38\sin^2(1,4t)$	38	—	$\pi/6$	1,8

Питання для самоконтролю

1. Скільки існує способів опису руху точки?
2. За якими формулами визначаються швидкість та прискорення точки при векторному способі опису руху?
3. За якими формулами визначаються швидкість та прискорення точки при координатному способі опису руху?
4. За якими формулами визначаються швидкість та прискорення точки при натуральному способі опису руху?
5. Що таке траєкторія руху точки?
6. У чому полягає інваріантність швидкості та прискорення точки?
7. За яких умов тверде тіло здійснює плоскопаралельний рух?
8. Наведіть приклади технічних пристроїв, які здійснюють плоскопаралельний рух?
9. Як виглядають кінематичні рівняння плоскопаралельного руху?
10. За якою формулою обчислюється вектор швидкості точки тіла, яке рухається плоскопаралельно?
11. За якою формулою обчислюється вектор прискорення точки тіла, яке рухається плоскопаралельно?
12. За якою формулою можна визначити значення кутової швидкості тіла при плоскопаралельному русі?
13. За якою формулою можна визначити значення кутового прискорення тіла при плоскопаралельному русі?
14. Що таке миттєвий центр швидкостей при плоскопаралельному русі?
15. В який спосіб знаходиться миттєвий центр швидкостей при плоскопаралельному русі?
16. За якою формулою визначається вектор абсолютної швидкості в разі складного руху точки?
17. За якою формулою визначається вектор абсолютного прискорення в разі складного руху точки?
18. За якою формулою визначається вектор прискорення Кориоліса в разі складного руху точки?

4. ДИНАМІКА

4.1. Коливання матеріальної точки

4.1.1. Теоретичний матеріал. Коливання настільки поширені у природі та в техніці, що вивчення їхніх закономірностей має самостійне значення. Різні по своїй фізичній природі коливальні явища мають однаковий математичний опис. Дослідження коливань матеріальної точки є прикладом вивчення загальних закономірностей коливань.

Класифікація сил, що діють на матеріальну точку. Серед сил, діючих на матеріальну точку, особливе місце займають **поновлюючі сили**, що прагнуть повернути точку в положення рівноваги. Вони залежать від величини відхилення точки від положення рівноваги і направлені убік, протилежний відхиленню. Саме ці сили надають руху точки коливальний характер.

На рис. 4.1 наведено два приклади, в першому з яких поновлююча сила \vec{F} – це сила пружності деформованої пружини, а у другому – рівнодійна сили ваги \vec{G} і сили Архімеда \vec{Q} ($\vec{F} = \vec{G} + \vec{Q}$). В обох випадках початок відліку координати x прийнято у положенні рівноваги тіла. Дані тіла рухаються поступально, тому рух кожного з них еквівалентний руху матеріальної точки.

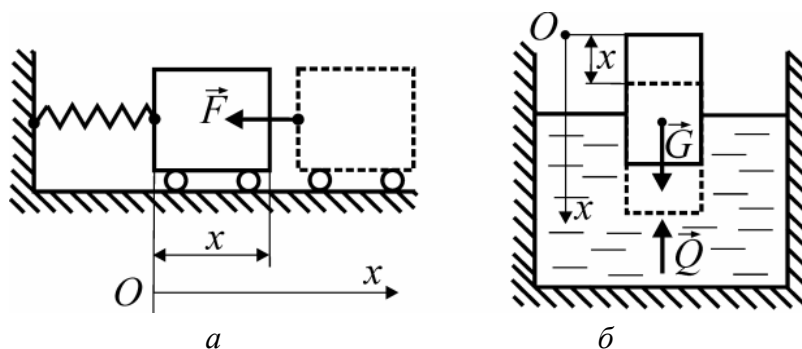


Рисунок 4.1 – Приклади виникнення поновлюючих сил:

a – сила пружності; b – сила Архімеда

На рухомі тіла зазвичай діють ще й сили опору, які залежать від швидкості руху. Крім того, можуть також діяти збуджуючі сили, які, будучи прикладеними до механічної системи, викликають її коливання.

Прямолінійні коливання матеріальної точки мають місце, коли траєкторією руху точки є пряма. Якщо при цьому поновлюючі сили є пропорційними величині відхилення точки від положення рівноваги, а сили опору – пропорційними швидкості точки, то коливання будуть лінійними (малими).

Диференціальне рівняння малих прямолінійних коливань матеріальної точки. Нехай на точку M масою m діє поновлююча сила \vec{F} , пропорційна відстані OM , а початкова швидкість точки направлена уздовж прямої OM або дорівнює нулю (рис. 4.2). Нехай на точку M діє також сила опору, пропорційна швидкості цієї точки і направлена протилежно їй. Крім того, на точку M діє гармонічна сила збудження, що направлена уздовж траєкторії точки. Якщо у даний момент часу точка M рухається праворуч, то сили будуть спрямовані так, як показано на рисунку 4.2. Запишемо рівняння руху точки у формі другого закону Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R} + \vec{H}.$$

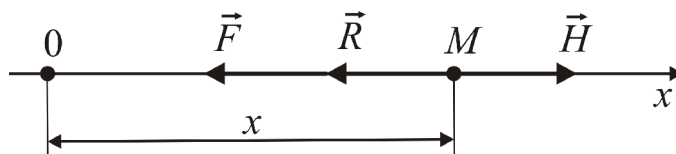


Рисунок 4.2 – Розрахункова модель прямолінійних коливань матеріальної точки

Спроекуємо цю векторну рівність на вісь x . Проекції сил набувають такого вигляду: поновлююча сила – $F_x = -cx$, де c – коефіцієнт пропорційності, $c > 0$; сила опору – $R_x = -\mu\dot{x}$, де μ – коефіцієнт в'язкості $\mu > 0$; збуджуюча сила – $H_x = H_0 \sin(pt)$, де H_0 – амплітуда збуджуючої сили $H_0 > 0$, p – її частота. Тоді одержимо диференціальне рівняння руху точки M :

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x} + H_0 \sin(pt).$$

Якщо розділити обидві частини цього рівняння на масу m та ввести нові позначення, то одержимо рівняння у такому вигляді:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h \sin(pt), \quad (4.1)$$

де $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ – власна (кругова або циклічна) частота коливань; $n = \frac{\mu}{2m}$ –

коефіцієнт затухання; $h = \frac{H_0}{m}$. Рівняння (4.1) – це диференціальне рів-

няння вимушених коливань точки за наявності в'язкого опору, з нього можна одержати більш прості диференціальні рівняння, які відповіда-тимуть окремим випадкам коливань.

Власні коливання (вільні коливання у середовищі без опору) – це коливання матеріальної точки, які відбуваються під дією лише поновлюючої сили. Такі коливання описують однорідним диференціальним рівнянням, яке можна отримати з рівняння (4.1), якщо покласти $n = 0$ та $h = 0$:

$$\ddot{x} + k^2x = 0. \quad (4.2)$$

Характеристичне рівняння для диференціального рівняння власних коливань має чисто уявні корні, тому загальний розв'язок (4.2) запишемо у вигляді

$$x = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt),$$

де C_1 і C_2 – постійні, що визначають з початкових умов:

$$x|_{t=0} = x_0; \quad \dot{x}|_{t=0} = \dot{x}_0.$$

Врешті рещт одержимо закон руху точки при власних коливаннях:

$$x = x_0 \cos(kt) + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin(kt),$$

розв'язок якого можна перетворити до більш зручного вигляду, якщо ввести такі позначення:

$$A \sin(\varphi_0) = x_0; A \cos(\varphi_0) = \frac{\dot{x}_0}{k} \quad \text{або} \quad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}; \operatorname{tg}(\varphi_0) = \frac{kx_0}{\dot{x}_0}.$$

$$x = A \sin(kt + \varphi_0).$$

Таким чином, власні коливання матеріальної точки є **гармонічними**; A – амплітуда коливань; $(kt + \varphi_0)$ – фаза коливань; φ_0 – початкова фаза; власні коливання відбуваються з періодом $T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}$.

Частота і період гармонічних коливань залежать від маси точки і коефіцієнта пропорційності поновлюючої сили, але не залежать від початкових умов. Цю властивість вільних коливань називають **ізохронністю**. Амплітуда і початкова фаза залежать як від параметрів системи m і c , так й від початкових умов.

Власні коливання будуть відбуватися у системі, зображеній на рисунку 4.3 а. Вантаж M , який приймають за матеріальну точку, здійснює прямолінійні коливання уздовж вертикальної осі x . На вантаж діють сила ваги $m\vec{g}$ і сила пружності \vec{F} , обумовлена наявністю пружини жорсткістю c .

Диференціальне рівняння руху вантажу має вигляд

$$m\ddot{x} = mg - c(\delta_{\text{ст}} + x).$$

З умови рівноваги можна встановити, що $mg = c\delta_{\text{ст}}$. Далі, виконуючи відповідні перетворення, одержимо диференціальне рівняння, подібне до (4.2). Тобто наявність сталої сили (в даному випадку – сили ваги) не впливає на характер коливального процесу, а призводить до зсуву центра коливань. Графік власних коливань наведено на рисунку 4.3 б.

Затухаючі коливання (вільні коливання за наявності в'язкого опору) – це окремий випадок руху матеріальної точки під дією поновлюючої сили і сили опору. Диференціальне рівняння такого руху одержуємо з виразу (4.1) при $h = 0$:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0.$$

Його характеристичне рівняння має корені $\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$. Характер руху точки істотно залежить від співвідношення величин n і k . Розглянемо три можливі випадки цього співвідношення.

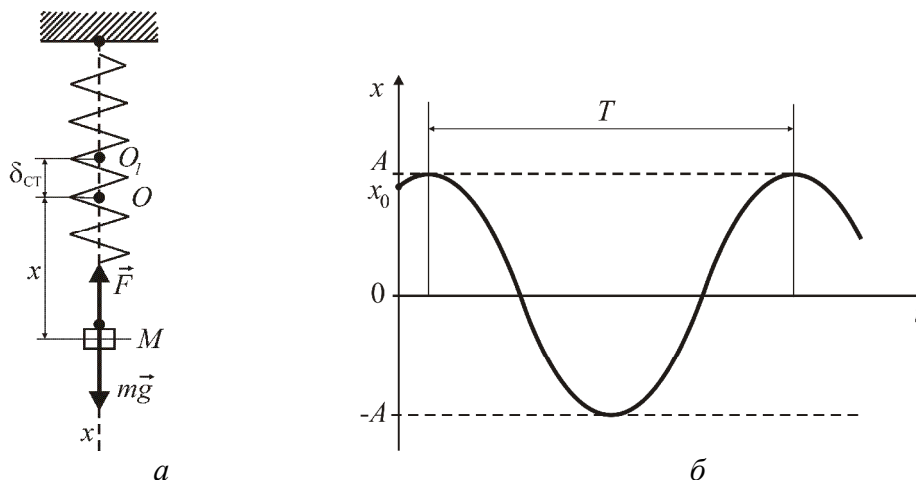


Рисунок 4.3 – Власні коливання матеріальної точки:

a – розрахункова модель власних коливань;
 b – графік залежності від часу координати точки при власних коливаннях

Випадок малого опору. Мають місце *затухаючі коливання* ($k > n$), які описують таким рівнянням:

$$x = A^* e^{-nt} \sin(k_1 t + \varphi_0),$$

де $A^* = \sqrt{x_0^2 + \frac{(nx_0 - \dot{x}_0)^2}{k^2 - n^2}}$ – умовна амплітуда; $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ – частота затухаючих коливань; $\varphi_0 = \arctg \frac{x_0 \sqrt{k^2 - n^2}}{nx_0 + \dot{x}_0}$ – початкова фаза затухаю-

чих коливань, графік яких наведено на рисунку 4.4. Затухаючі коливання не є періодичними, але проміжок часу між двома послідовними максимальними відхиленнями точки від положення рівноваги в одну й ту ж сторону залишається незмінним. Цю величину називають **умовним періодом** затухаючих коливань $T_1 = 2\pi / k_1$. **Швидкість загасання коливань** характеризується відношенням величин двох послідовних максимальних відхилень точки від положення рівноваги в один і той же бік. Це відношення називають **декрементом коливань**:

$$\delta = \frac{x(t)}{x(t+T_1)} = \frac{A^* e^{-nt}}{A^* e^{-n(t+T_1)}} = e^{nT_1}.$$

Натуральний логарифм цієї величини – так званий **логарифмічний декремент коливань**.

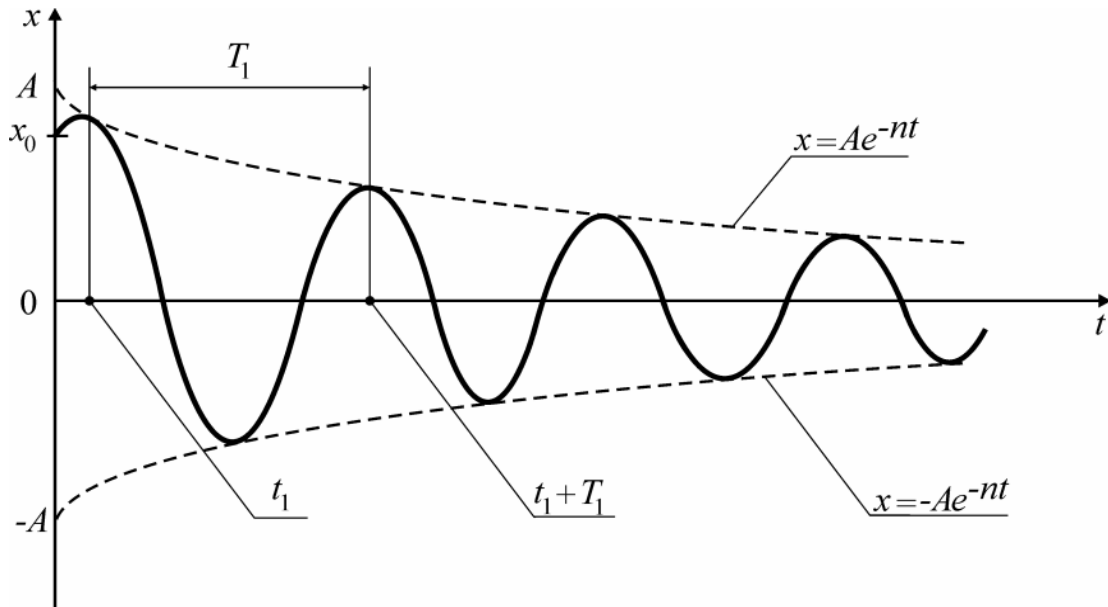


Рисунок 4.4 – Графік залежності від часу координати точки при затухаючих коливаннях

Випадок критичного опору. Він має місце, коли $k = n$, тобто корені характеристичного рівняння є дійсними числами, рівними та від'ємними, а загальний розв'язок диференціального рівняння прямолінійного руху має вигляд

$$x = e^{-nt} (C_1 + C_2 t).$$

Випадок великого опору. Він має місце, коли $k < n$, тобто корені характеристичного рівняння дійсні, різні та від'ємні, а загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

У двох останніх випадках рух точки втрачає коливальний характер і стає **апериодичним**. Залежно від величини і напрямку початкової

швидкості графік коливань має вигляд однієї з трьох кривих, приведені на рисунку 4.5. Константи C_1, C_2 визначають, використовуючи початкові умови руху.

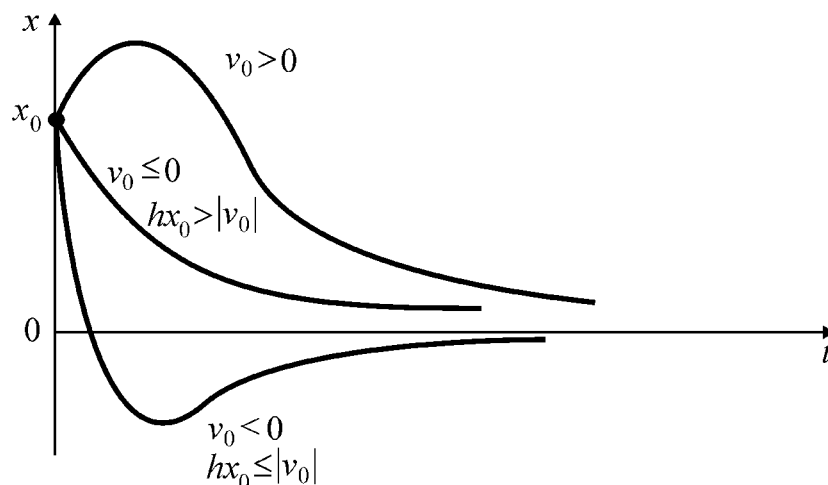


Рисунок 4.5 – Графіки залежності від часу координати точки при аперіодичному русі за різних початкових умов

Вимушені коливання – це коливання, які здійснює матеріальна точка під дією поновлюючої сили, а також сил опору і збудження. Їх описують неоднорідним диференціальним рівнянням (4.1), яке має загальний розв’язок у вигляді

$$x = B \sin(pt - \varepsilon), \quad B = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}, \quad \operatorname{tg}(\varepsilon) = \frac{2np}{k^2 - p^2}, \quad (4.3)$$

де B – амплітуда вимушених коливань, ε – зсув фаз. Аналізуючи формули (4.3), можна зробити висновок, що вимушені коливання є незатухаючими, а їхня частота та період дорівнюють частоті та періоду сили збудження. Амплітуда вимушених коливань залежить від власної частоти, частоти збуджуючої сили та від коефіцієнта затухання, а значить від коефіцієнта в’язкості μ . Для аналізу цієї залежності зручно провести деякі перетворення з другою формулою (4.3), якщо попередньо ввести такі позначення: **коефіцієнт розладу** – $z = \frac{p}{k}$, **безрозмірний коефі-**

цієнт в'язкості – $b = \frac{n}{k}$, *коефіцієнт динамічності* – $\eta = \frac{B}{B_0}$, де B_0 – статичне відхилення точки під дією сили, яка дорівнює амплітуді H_0 збуджуючої сили. Величина B_0 може бути визначена з розгляду рівноваги, звідки $B_0 = \frac{H_0}{c} = \frac{h}{k^2}$. Перейдемо у другій формулі (4.3) до коефіцієнта динамічності та одержимо, що

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4b^2 z^2}}.$$

Параметрична залежність коефіцієнта динамічності від коефіцієнта розладу та безрозмірного коефіцієнта в'язкості отримала назву **амплітудно-частотної характеристики** (АЧХ). На рис. 4.6 наведено криві АЧХ для різних значень безрозмірного коефіцієнта в'язкості b . Так само можна перетворити й третю формулу (4.3) та одержати залежність зсуву фаз від коефіцієнта розладу та безрозмірного коефіцієнта в'язкості:

$$\operatorname{tg}(\varepsilon) = \frac{2bz}{1-z^2}.$$

Криві залежності зсуву фаз від коефіцієнта розладу z для різних значень коефіцієнта b наведено на рисунку 4.6. При $z = 1$ зсув фаз дорівнює $\frac{\pi}{2}$ при будь-яких значеннях b , при подальшому зростанні z зсув фаз наближається до величини π .

У середовищі без опору одержимо диференціальне рівняння **вимушених коливань** з виразу (4.1) при $n = 0$:

$$x = B \sin(pt) = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt),$$

а також коефіцієнт динамічності:

$$\eta = \frac{1}{|1 - z^2|}.$$

Резонанс – це явище значного зростання амплітуди коливань у разі збігу частоти збуджуючої сили та власної частоти коливань. Тоді при відсутності в'язкого опору закон резонансних коливань має вигляд:

$$x_p = -\frac{h}{2p} t \cos(pt).$$

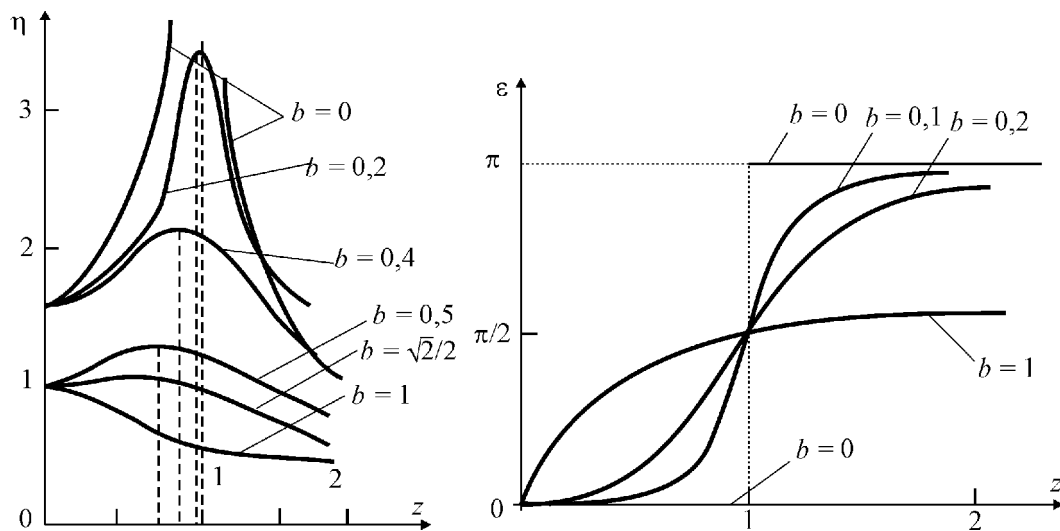


Рисунок 4.6 – АЧХ при різних коефіцієнтах в'язкості

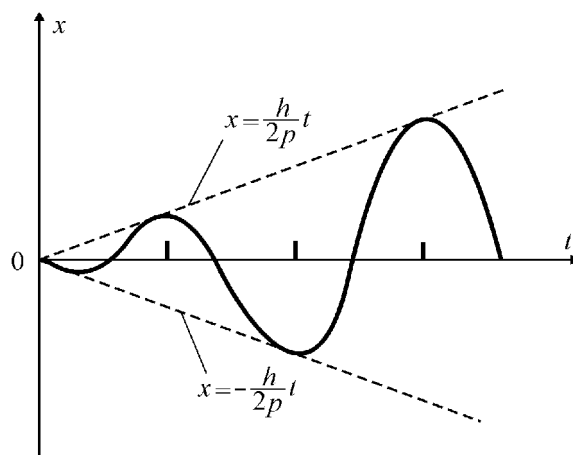


Рисунок 4.7 – Графік залежності від часу координати точки при резонансі за відсутності в'язкого опору

Перетворення у системах пружних елементів. У деяких випадках рух матеріальної точки є обмеженим за допомогою декількох

пружних елементів (пружин) і можна замінити цю систему шляхом нескладних перетворень одним елементом, який буде мати так звану **еквівалентну жорсткість**. Найбільш поширені випадки з'єднання пружних елементів наведено на рисунках 4.8 а, б, в і усіх їх можна звести до схеми (рис. 4.8 г).

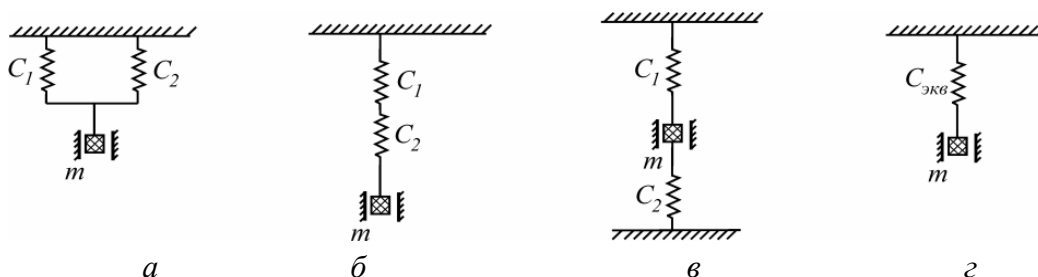


Рисунок 4.8 – Характерні види з'єднання пружних елементів

Для подібних перетворень використовують при паралельному та послідовному з'єднаннях (див. рис.4.8) відповідні формули:

$$c_{\text{екв}} = c_1 + c_2; \quad \frac{1}{c_{\text{екв}}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}. \quad (4.4)$$

Якщо кількість пружних елементів, з'єднаних паралельно або послідовно, більша, то формули (4.4) набувають вигляду

$$c_{\text{екв}} = \sum_{i=1}^n c_i; \quad \frac{1}{c_{\text{екв}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i}.$$

Приклад перетворення у системі пружних елементів. Розглянемо систему пружних елементів, яка обмежує рух матеріальної точки (рис. 4.9 а). Визначаємо, що пружини c_1 та c_2 , c_7 та c_8 зв'язані послідовно, c_3 , c_4 та c_5 , c_9 та c_{10} – паралельно. Відповідно замінимо названі групи пружин еквівалентними, коефіцієнти жорсткості яких визначають таким чином:

$$\frac{1}{c_{1-2}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \Rightarrow c_{1-2} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}; \quad c_{3-5} = c_3 + c_4 + c_5;$$

$$\frac{1}{c_{7-8}} = \frac{1}{c_7} + \frac{1}{c_8} \Rightarrow c_{7-8} = \frac{c_7 c_8}{c_7 + c_8}; \quad c_{9-10} = c_9 + c_{10}.$$

Продовжуючи подібним чином, прийдемо до схеми (рис. 4.9 г):

$$c_{3-8} = c_{3-5} + c_6 + c_{7-8}; \quad \frac{1}{c_{9-11}} = \frac{1}{c_{9-10}} + \frac{1}{c_{11}} \Rightarrow c_{9-11} = \frac{c_9 c_{11}}{c_9 + c_{11}};$$

$$\frac{1}{c_{1-8}} = \frac{1}{c_{1-2}} + \frac{1}{c_{3-8}} \Rightarrow c_{1-8} = \frac{c_{1-2} c_{3-8}}{c_{1-2} + c_{3-8}}; \quad c_{\text{екв}} = c_{1-8} + c_{9-11}.$$

4.1.2. Комп'ютерне моделювання коливань матеріальної точки. Нехай у деякий момент часу у системі (рис. 4.10) починає поступально рухатись кріплення за законом:

$$u = U_0 \cos(pt). \quad (4.5)$$

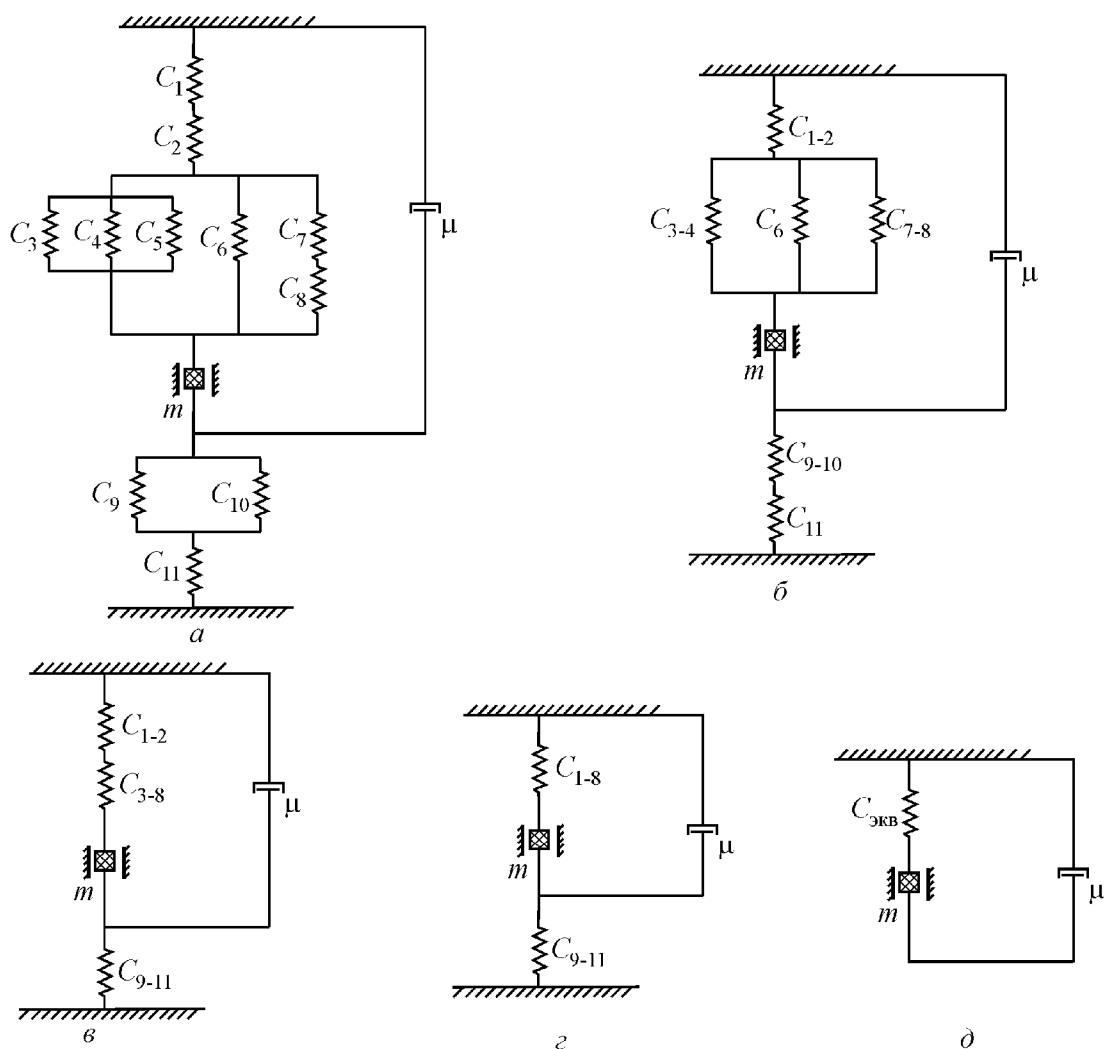


Рисунок 4.9 – Приклад перетворень системи декількох пружних елементів: а – вихідна система; б, в, г – проміжні системи; д – еквівалентна система

Визначимо закон руху матеріальної точки масою m , яка пружинами та демпфером зв'язана з рухомим кріпленням.

Складемо диференціальне рівняння руху точки відповідно до розрахункової схеми (див. рис. 4.10). Слід зауважити, що подібне рівняння може бути складеним як у нерухомій (абсолютній) системі координат (СК), так і у рухомій, пов'язаній із рухомим кріпленням. Розмістимо початок абсолютної системи координат у точці O_1 , яка співпадає з положенням матеріальної точки у стані спокою. Початок рухомої системи координат розмістимо у точці O , яка у кожен момент часу співпадає з рухомою матеріальною точкою. Тоді згідно з теорією складного руху точки абсолютна координата $s = x + u$, проекція абсолютної швидкості на вертикальну вісь $\dot{s} = \dot{x} + \dot{u}$, проекція абсолютного прискорення на вертикальну вісь: $\ddot{s} = \ddot{x} + \ddot{u}$.

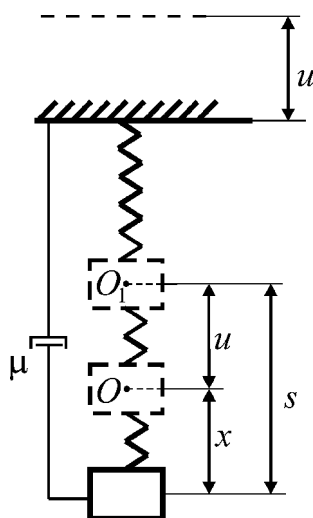


Рисунок 4.10 – Розрахункова схема для комп'ютерного моделювання коливань матеріальної точки

Сили пружності та в'язкого опору, які діють на матеріальну точку, у даному випадку залежать від відносної координати x та відносної швидкості \dot{x} . Поточне подовження пружини дорівнює відносній координаті $\Delta \ell = x = s - u$. Проекція відносної швидкості на вертикальну вісь $\dot{x} = \dot{s} - \dot{u}$. Рівняння руху мають такий вигляд:

$$\text{у абсолютній СК:} \quad m\ddot{s} = -c_{\text{екв}}(s - u) - \mu(\dot{s} - \dot{u}); \quad (4.6)$$

$$\text{у відносній СК:} \quad m(\ddot{x} + \ddot{u}) = -c_{\text{екв}} x - \mu \dot{x}. \quad (4.7)$$

Після відповідних перетворень одержимо:

$$\begin{aligned} \ddot{s} + 2n\dot{s} + k^2 s &= -2npU_0 \sin(pt) + k^2 U_0 \cos(pt); \\ \ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x &= p^2 U_0 \cos(pt). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Диференціальні рівняння (4.8) повинні бути доповненими початковими умовами. З урахуванням (4.5) початкові умови набувають вигляду: у відносній СК – $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$; у абсолютній СК – $s(0) = x_0 + U_0, \dot{s}(0) = v_0$.

Таким чином, матеріальна точка у даному випадку здійснює вимушені коливання, які зумовлені рухомим кріпленням – це випадок так званого *кінематичного збудження*. Подальший аналіз проведемо за собами ПК КіДиМ, скориставшись файлом вихідних даних.

Текст файлу

```
РАБОТА:=№ 4.1.1 Власні коливання;
ВЫПОЛНИЛ:= ст. Іванов П.С., гр.І-17а;
# Запис диференціальних рівнянь коливального руху #
u=U0*cos(p*t);
J.x=m; P.x=-mu*x't-c*x-m*u't't;
J.s=m; P.s=-c*(s-u)-mu*(s't-u't);

# Вихідні дані, початкові умови, параметри коливань #
m=240; c=2400; mu=100; U0=0; p=20;
x0=0; v0=1; tk=10; s0=x0+U0;
k=sqrt(c/m); w=sqrt(k^2-h^2); n=mu/(2*m);

# Кінетична, потенціальна, повна енергія, потужність #
Ta=1/2*m*(s't)^2; Pa=1/2*c*(s-u)^2; Ea=Ta+Pa;
Tr=1/2*m*(x't)^2; Pr=1/2*c*x^2; Er=Tr+Pr;
T0=m*v0^2/2; П0=1/2*c*(s0)^2; E0=T0+П0;
dTa = m*s't*s't't; dTr = m*x't*x't't;
Na=(- mu*(s't-u't)-c*(s-u))*(s't-u't);
Nr=(- mu*x't-c*x-m*u't't)*x't;

# Інструкції до виконання роботи #
НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ:= t(0), x(x0), x't(v0), s(s0), s't(v0);
```

```

КОНЕЧНЫЕ УСЛОВИЯ:=t(tk);
ПОКАЗАТЬ:=x, x't, x't't, x't(x), s, s't;
СРАВНИТЬ:=r(x,s,u),r1(dTa,Na, dTr,Nr),r2(k,w),
r4(E0,Ea,Ta,Pa,Er,Tr,Pr);
РАСЧЕТ:=ПЕЧАТЬ УРАВНЕНИЙ;

# Дослідження різних видів коливань #
РАБОТА:= №4.1.2 Затухаючі коливання, mu=100;
mu=100; РАСЧЕТ:=печать уравнений;
РАБОТА:= №4.1.3 Затухаючі коливання, mu=200;
mu=200; РАСЧЕТ:=печать уравнений;
РАБОТА:= №4.1.4 Аперіодичний рух n=k;
mu=2*m*k; РАСЧЕТ:=печать уравнений;
РАБОТА:= №4.1.5 Вимушені коливання без опору;
U0=10; mu=0; tk=20*(2*pi/w); РАСЧЕТ:=печать уравнений;
РАБОТА:= №4.1.6 Резонанс у середовищі без опору;
U0=10; p=k; mu=0; tk=20*(2*pi/w);
РАСЧЕТ:=печать уравнений;
РАБОТА:= №4.1.7 Биття у середовищі без опору;
U0=10; p=0.9*k; mu=0; tk=20*(2*pi/w);
РАСЧЕТ:=печать уравнений;
РАБОТА:= №4.1.8 Вимушені коливання у середовищі із
в'язким опором mu=100;
U0=10; mu=100; tk=20*(2*pi/w); РАСЧЕТ:=печать уравнений;
РАБОТА:= №4.1.9 Вимушені коливання у середовищі із
в'язким опором mu=200;
U0=10; mu=200; tk=20*(2*pi/w); РАСЧЕТ:=печать уравнений;
КОНЕЦ;

```

У поданому файлі за правилами, прийнятими у ПК КіДиМ, складено диференціальні рівняння коливального руху відповідно до формул (4.6) та (4.7). У тексті файлу вихідних даних прийняті такі позначення: **u** – закон руху закріплення (відповідно до формули (4.5)); **U0** – амплітудне значення переміщення закріплення; **p** – частота руху закріплення; **x** – відносна координата точки, зміна якої регламентується диференціальним рівнянням (4.7); **s** – абсолютна координата точки, зміна якої регламентується диференціальним рівнянням (4.6); **m** – маса точки; **c** – коефіцієнт жорсткості пружини; **mu** – коефіцієнт опору в'язкого середовища; **x0** – початкове відхилення у відносній системі координат;

$\mathbf{s0}$ – початкове відхилення у абсолютній системі координат; $\mathbf{v0}$ – початкова швидкість; \mathbf{k} – власна частота коливань; \mathbf{w} – кругова частота затухаючих коливань; \mathbf{n} – коефіцієнт затухання; \mathbf{Ta} , \mathbf{Pa} , \mathbf{Ea} – кінетична, потенціальна та повна механічна енергія матеріальної точки, які обчислюються через кінематичні характеристики у абсолютній СК:

$$T_a = \frac{m\dot{s}^2}{2}, P_a = \frac{c(s-u)^2}{2}, E_a = T_a + P_a; \mathbf{Tr}, \mathbf{Pr}, \mathbf{Er} - \text{кінетична, потенціальна та повна механічна енергія матеріальної точки, які обчислюються через кінематичні характеристики у відносній СК:}$$

$T_r = \frac{m\dot{x}^2}{2}, P_r = \frac{cx^2}{2}, E_r = T_r + P_r; \mathbf{t0}, \mathbf{p0}, \mathbf{e0}$ – початкові значення кінетичної, потенціальної та повної механічної енергії; $\mathbf{dT_a}, \mathbf{dTr}$ – похідні за часом від кінетичної енергії \mathbf{Ta} та \mathbf{Tr} відповідно:

$$\frac{dT_a}{dt} = m\dot{s}\ddot{s}, \frac{dT_r}{dt} = m\dot{x}\ddot{x}; \mathbf{Na}, \mathbf{Nr} - \text{потужність сил, які діють на матеріальну точку у абсолютній та відносній СК відповідно:}$$

$N_a = (-\mu(\dot{s}-\dot{u})-c(s-u))(\dot{s}-\dot{u}), N_r = (-\mu\dot{x}-cx-m\ddot{u})\dot{x}; \mathbf{tk}$ – кінцевий момент часу, до якого відбувається розв’язок (задається або довільно, або залежно від умовного періоду затухаючих коливань).

За допомогою наведеного файлу вихідних даних можна дослідити основні закономірності коливального руху точки у абсолютній та відносній СК, а також встановити основні закономірності у зміні енергетичних характеристик при русі.

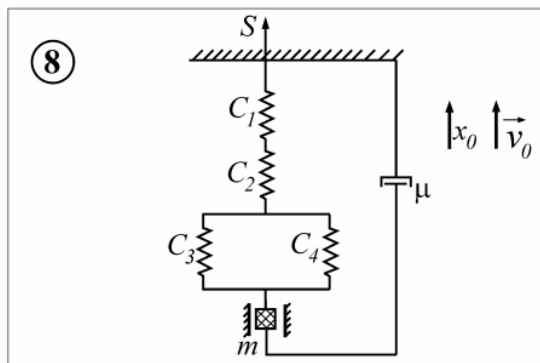
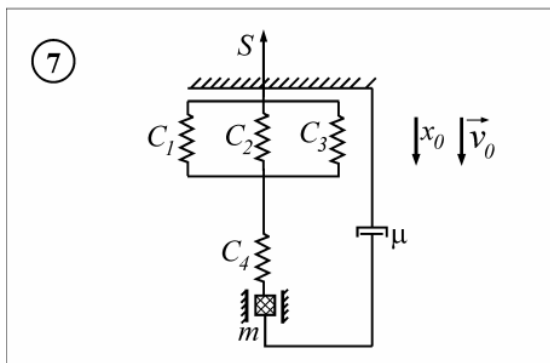
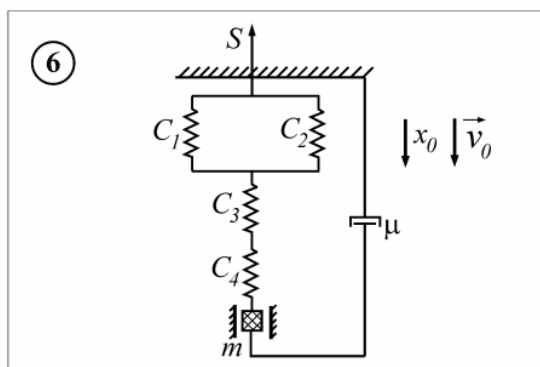
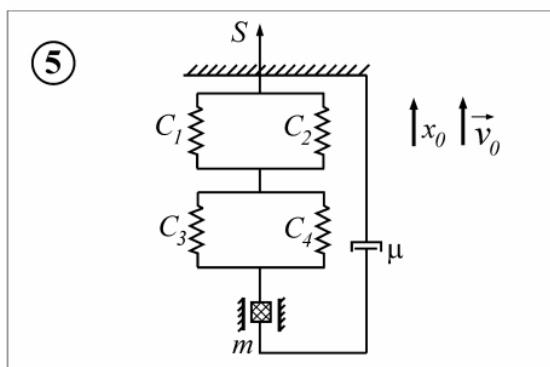
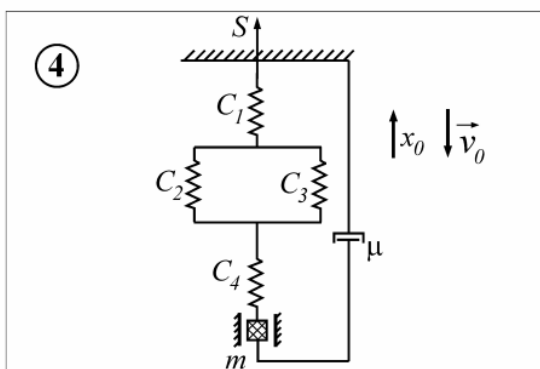
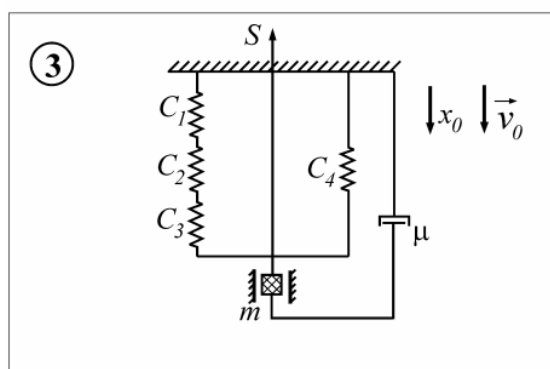
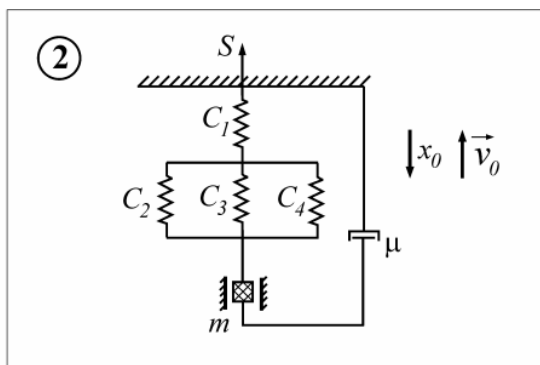
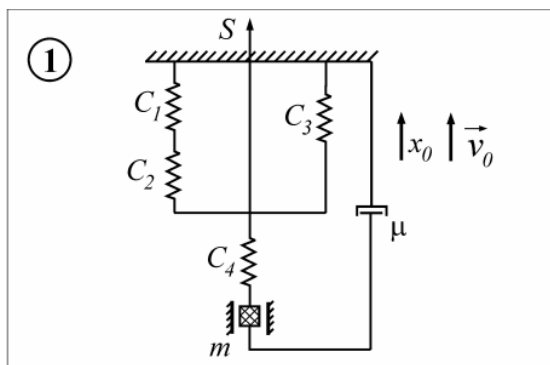
Змінюючи значення параметрів системи та початкових умов, можна в результаті одержати рух матеріальної точки відповідно до різноманітних видів розглянутих коливань. Для дослідження власних коливань необхідно задавати « $\mathbf{U0=0}; \mathbf{mu=0};$ », для дослідження вільних коливань із в’язким опором (затухаючих коливань) – « $\mathbf{U0=0};$ » (при цьому значення коефіцієнта в’язкості слід задавати не рівним нулеві), для моделювання аперіодичного руху достатньо задати значення коефіцієнта в’язкості таким чином: « $\mathbf{mu=2*m*k};$ » (виходячи з умови рівності між власною частотою та коефіцієнтом затухання), для дослідження вимушених коливань амплітудне значення переміщень кріп-

лення U_0 не повинне дорівнювати нулеві, для розгляду биттів частота зовнішнього збудження (частота руху закріплення) повинна незначним чином відрізнятись від власної частоти (у розглянутому прикладі задано « $p=0.9 \cdot k$ »), для дослідження резонансних коливань достатньо задати: « $p=k$ ».

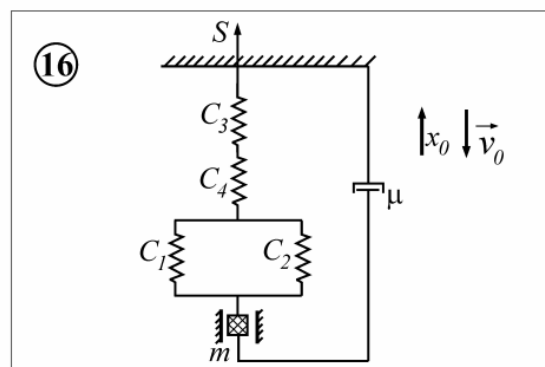
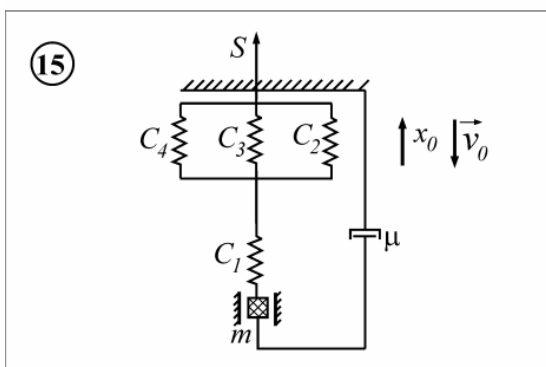
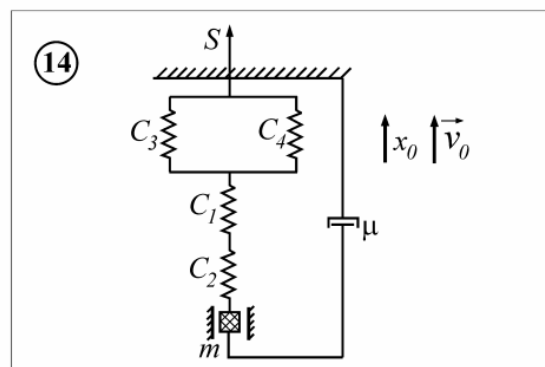
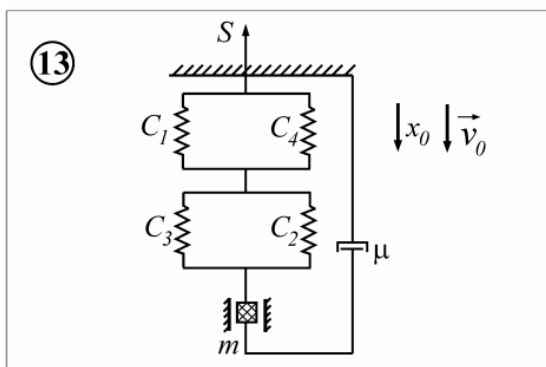
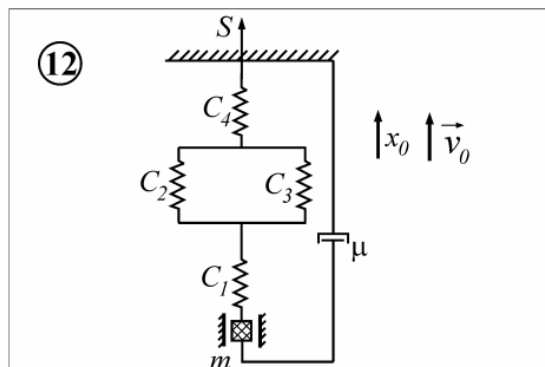
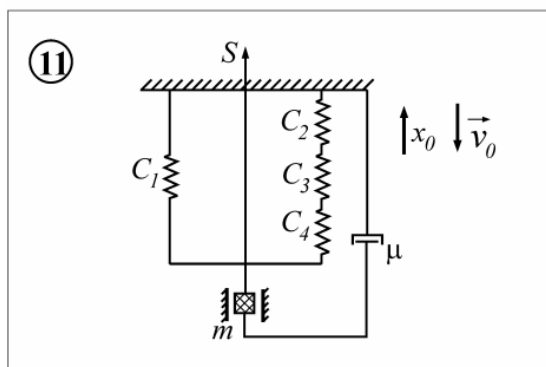
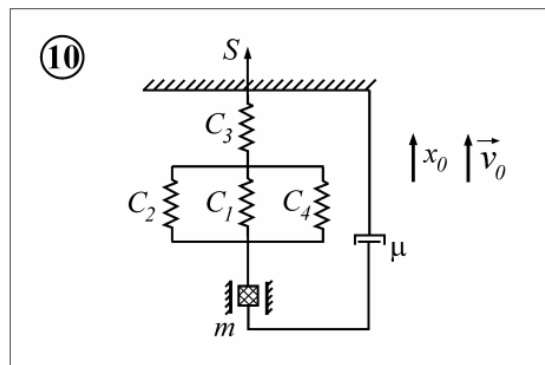
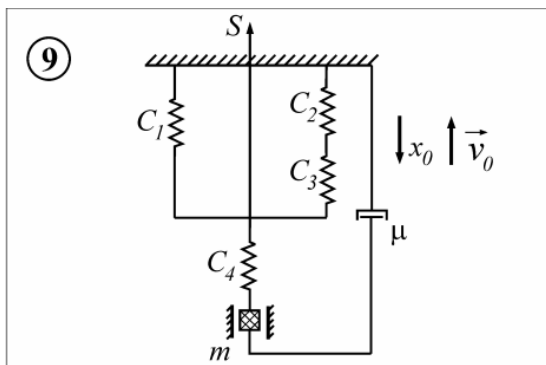
4.1.3. Завдання для самостійної роботи. Для розрахункових схем, зображених на рисунках в таблиці 4.1 та вихідних даних, наведених у таблицях 4.2–4.3, необхідно зробити перетворення у системах пружних елементів подібно до прикладу, наведеного у п. 4.1.1, та провести дослідження властивостей різних режимів коливань матеріальної точки, використовуючи засоби ПК КіДиМ та опис задачі, наведеної у п. 4.1.2. Аналіз вимушених коливань проводити для випадку, коли кріплення рухається поступально за законом $u = U_0 \cos(pt)$.

Необхідно вивчити закономірності руху матеріальної точки та закономірності у змінах її енергетичних характеристик для випадків власних коливань, згасаючих коливань, аперіодичного руху, вимушених коливань, биттів та резонансу.

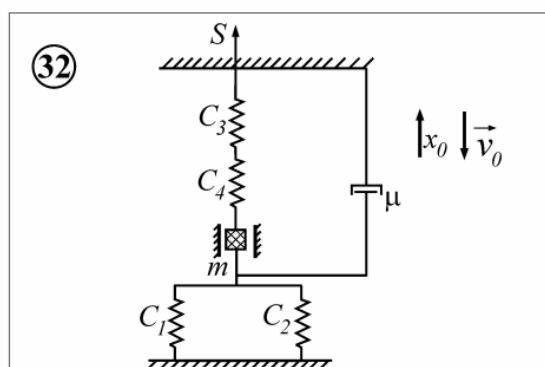
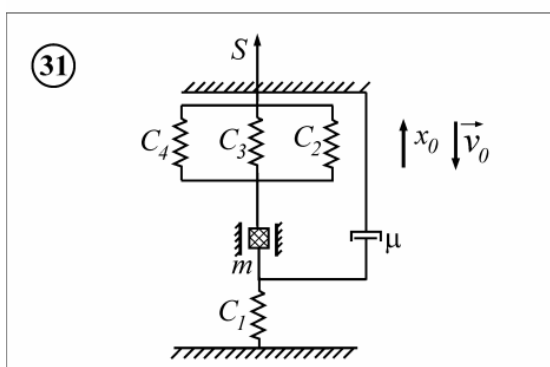
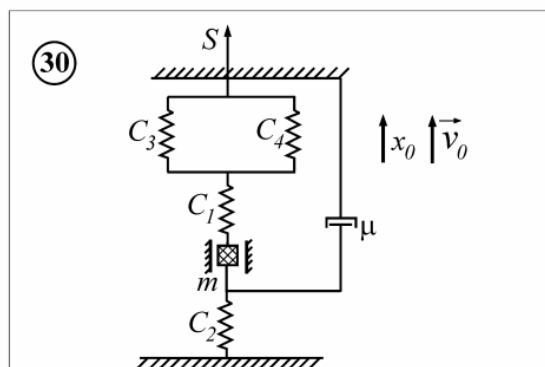
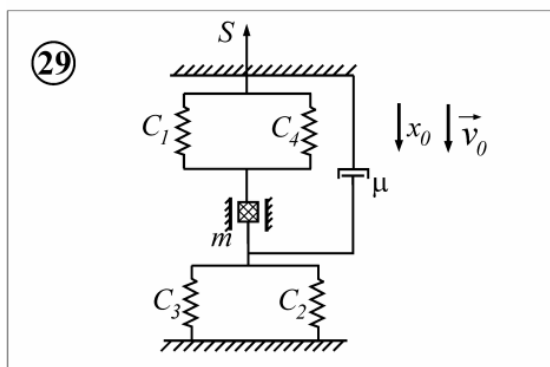
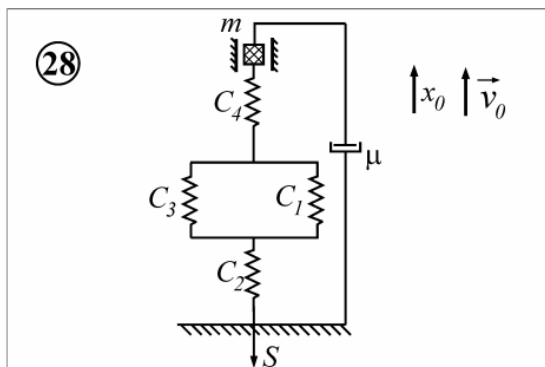
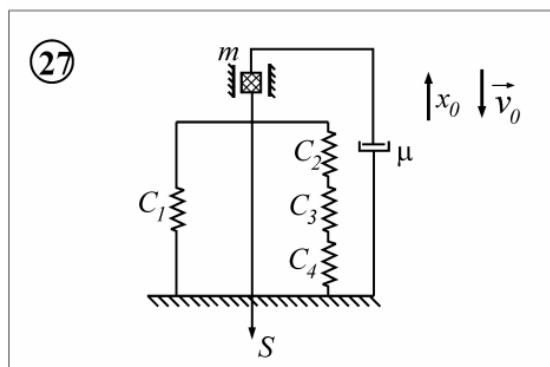
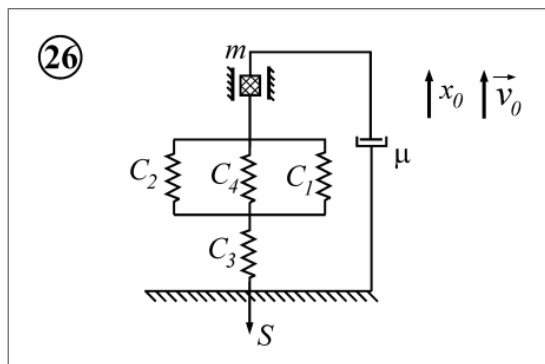
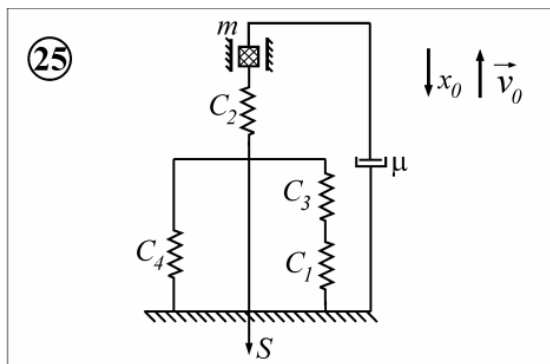
Таблиця 4.1 – Варіанти завдань для аналізу коливань матеріальної точки



Продовження табл. 4.1



Продовження табл. 4.1



Таблиця 4.2 – Параметри коливальної системи

Номер варіанта	c_1 , кН/м	c_2 , кН/м	c_3 , кН/м	c_4 , кН/м	m , кг	μ , кг/с
1	10	20	30	40	2	3
2	15	25	35	45	1	2
3	12	13	14	15	3	7
4	22	33	44	11	4	8
5	11	33	44	55	3	9
6	10	30	50	70	5	11
7	45	65	85	25	2	10
8	44	64	84	24	3	8
9	43	63	83	23	4	7
10	42	62	82	22	5	6
11	41	61	81	21	6	5
12	40	60	80	20	7	4
13	30	50	70	90	8	3
14	31	51	71	91	9	2
15	32	52	72	92	10	1
16	33	53	73	93	11	2
17	34	54	74	94	12	3
18	35	55	75	95	10	4
19	36	56	76	96	9	5
20	37	57	77	97	8	6
21	38	58	78	98	7	7
22	39	59	79	99	6	8
23	11	21	31	41	5	9
24	12	22	32	42	4	10
25	13	23	33	43	3	11
26	14	24	34	44	2	12
27	15	25	35	45	1	13
28	16	26	36	46	2	14
29	17	27	37	47	3	15
30	18	28	38	48	4	16
31	11	21	31	41	5	17
32	13	12	11	10	6	18

Таблиця 4.3 – Початкові умови та параметри кінематичного збудження для аналізу вимушених коливань

Номер варіанта	v_0 , м/с	x_0 , м	U_0 , м	p , с ⁻¹
1	0,1	1	0,9	10
2	0,2	2	0,8	11
3	0,3	3	0,7	12
4	0,4	4	0,6	13
5	0,5	5	0,5	14
6	0,6	6	0,4	15
7	0,7	7	0,3	16
8	0,8	8	0,2	17
9	0,9	9	0,1	18
10	1,1	10	1,0	19
11	1,2	9	1,1	21
12	1,3	8	1,2	22
13	1,4	7	1,3	23
14	1,5	6	1,4	24
15	1,6	5	1,5	25
16	1,7	4	1,6	26
17	1,8	3	1,7	27
18	1,9	2	1,8	28
19	2,0	1	1,9	29
20	2,1	2	0,9	30
21	2,2	3	0,8	31
22	2,3	4	0,7	32
23	2,4	5	0,6	33
24	2,5	6	0,5	34
25	2,6	7	0,4	35
26	2,7	8	0,3	36
27	2,8	9	0,2	37
28	2,9	10	0,1	38
29	3,0	9	1,0	39
30	3,1	8	1,3	40
31	3,3	7	1,4	41
32	3,4	6	1,5	42

4.2. Дослідження руху механічної системи

4.2.1. Аналітичні дослідження руху механічних систем за допомогою загальних теорем динаміки. Одним з найбільш ефективних засобів дослідження руху механічних систем є використання загальних теорем динаміки, за якими дослідження їхнього руху зводяться до інтегрування диференціальних рівнянь. Для аналітичного дослідження найбільш універсальними є теореми про зміну кінетичної енергії системи в інтегральній і диференціальній формах. Перша теорема дозволяє визначити швидкості тіл, а друга – їх прискорення. Інтегрування диференціальних рівнянь руху систем тіл, що встановлюють за загальними теоремами динаміки, більш ефективно здійснити із застосуванням чисельних методів, для чого використовуються програмні засоби для ПК.

Розрахункову схему механічної системи тіл подано на рисунку 4.11.

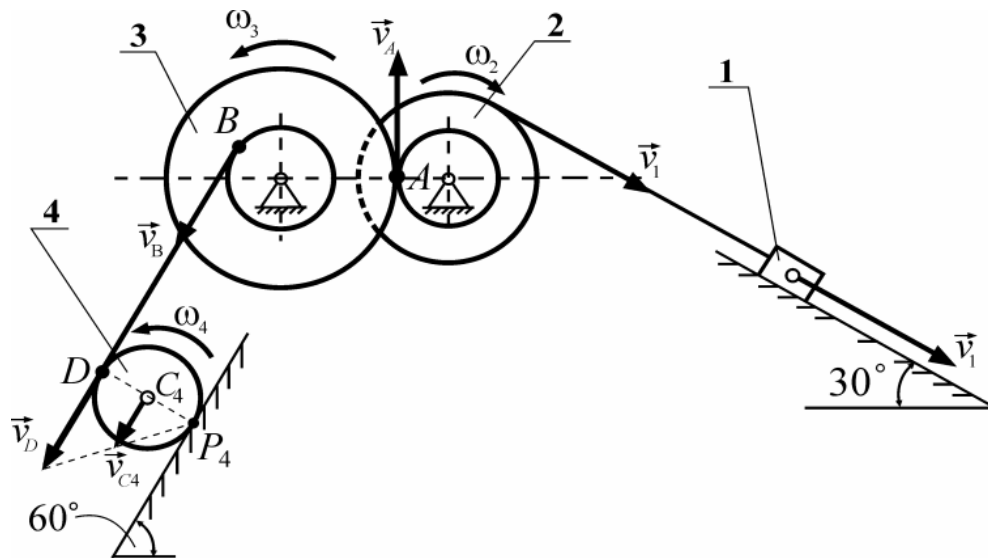


Рисунок 4.11 – Схема механічної системи

Механічна система розпочинає рух зі стану спокою під дією сил ваги, прикладених у центрах ваги кожного тіла. Тіло 1 рухається поступально зі швидкістю \vec{v}_1 уздовж нерухомої шорсткої поверхні, яка нахилена до горизонту під кутом α . Тіла системи 1 і 2, 3 і 4 є зв'язаними нерозтяжними невагомими нитками, а тіла 2 та 3 під час

руху залишаються зчепленими й здійснюють обертальні рухи навколо нерухомої осі з кутовими швидкостями $\vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3$ відповідно. Котушка 4 здійснює плоскопаралельний рух при коченні без ковзання уздовж нерухомої шорсткої поверхні, нахиленої до горизонту під кутом β . Котушка просувається уздовж поверхні зі швидкістю її центра мас \vec{v}_{C_4} та обертається навколо осі з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_4$. Ковзання тіла 1 та кочення котушки 4 по шорстких поверхнях відбувається під дією сил ваги \vec{G}_1, \vec{G}_4 , сили опору ковзанню $\vec{F}_{\text{тр}}$ та моменту опору коченню $M_{\text{тр}}$, відповідно, як показано на рисунку 4.12.

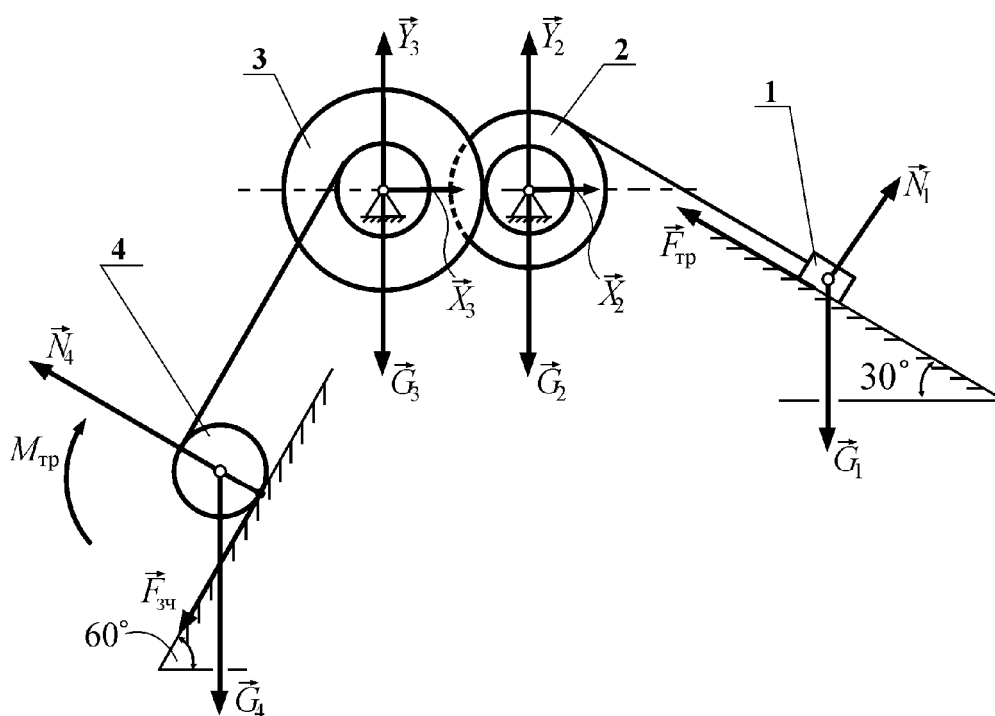


Рисунок 4.12 – Сили, які діють у системі

Завдання. Визначити швидкості та прискорення тіл механічної системи в момент часу, коли тіло 1 зі стану спокою переміститься уздовж поверхні на відстань S (м). Вихідні дані для розв'язання завдання наведено у таблиці 4.4, де m_i (кг) – маси тіл ($i = 1, 2, 3, 4$); R_i, r_i (м) – зовнішні та внутрішні радіуси тіл обертання ($i = 2, 3, 4$); ρ_i (м) – радіуси інерції складених тіл обертання ($i = 2, 3$), f – коефіцієнти тертя ковзання, f_1 (м) – коефіцієнт опору коченню шорстких поверхонь.

Таблиця 4.4 – Вихідні дані

m_1	m_2	m_3	m_4	R_2	r_2	ρ_2	R_3	r_3	ρ_3	R_4	f	f_1	S
$10m$	$4m$	$6m$	$8m$	$4r$	r	$2r$	$8r$	$4r$	$6r$	$4r$	$0,1$	$0,4r$	2

Визначення швидкостей тіл. Для визначення швидкостей тіл системи скористаємось теоремою про зміну кінетичної енергії системи в інтегральній формі. Для системи тіл, що починає рух зі стану спокою під дією зовнішніх сил, запишемо теорему:

$$T = A, \quad (4.9)$$

де $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ – кінетична енергія системи тіл; A – робота зовнішніх сил – сил ваги \vec{G}_1, \vec{G}_4 ; сили опору ковзанню \vec{F}_{TR} та моменту опору коченню $M_{тр}$, прикладених до рухомих центрів ваги тіл 1 і 4. Сили ваги тіл 2 і 3, які прикладені до нерухомих центрів ваги, роботу не здійснюють.

Кінетична енергія тіла 1, що рухається поступально уздовж нерухомої шорсткої поверхні зі швидкістю \vec{v}_1 , дорівнює $T_1 = m_1 v_1^2 / 2$. Кінетичні енергії тіл 2 та 3, що здійснюють обертальні рухи навколо своєї нерухомої осі з кутовими швидкостями $\vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3$, дорівнюють $T_2 = J_2 \omega_2^2 / 2$, $T_3 = J_3 \omega_3^2 / 2$, де $J_2 = m_2 \rho_2^2$, $J_3 = m_3 \rho_3^2$ – осьові моменти інерції тіл 2 і 3 відповідно. Котушка 4 здійснює плоскопаралельний рух при коченні по шорсткій поверхні так, що її центр мас просувається уздовж поверхні зі швидкістю \vec{v}_{C_4} , та обертається навколо осі з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_4$. Кінетична енергія котушки 4 дорівнює $T_4 = m_4 v_{C_4}^2 / 2 + J_4 \omega_4^2 / 2$, де $J_4 = m_4 R_4^2 / 2$ – осьовий момент її інерції 4.

Кінетичну енергію системи тіл запишемо так:

$$T = m_1 v_1^2 / 2 + J_2 \omega_2^2 / 2 + J_3 \omega_3^2 / 2 + m_4 v_{C_4}^2 / 2 + J_4 \omega_4^2 / 2. \quad (4.10)$$

Далі визначимо роботу сил ваги тіл 1 і 4, центри ваги яких зі стану спокою переміщуються уздовж нахилених поверхонь на відстані x_1, x_{C_4} :

$$A_{G_1} = (\vec{G}_1, \vec{x}_1) = m_1 g \sin(\alpha) x_1, \quad A_{G_4} = (\vec{G}_4, \vec{x}_{C_4}) = m_4 g \sin(\beta) x_{C_4}.$$

Значення сили опору ковзанню $F_{\text{тр}}$ та моменту опору коченню $M_{\text{тр}}$, прикладених до рухомих центрів ваги тіл 1 і 4, визначимо з урахуванням законів опору:

$$F_{\text{тр}} = f N_1, \quad M_{\text{тр}} = f_1 N_4,$$

де f, f_1 – коефіцієнти тертя ковзання й кочення; $N_1 = m_1 g \cos(\alpha)$, $N_4 = m_4 g \cos(\beta)$ – нормальні реакції, що діють з боку нахилених поверхонь.

Роботу сили опору руху тіла 1 і моменту опору коченню тіла 4 визначимо так:

$$A_{F_{\text{тр}}} = -F_{\text{тр}} x_1 = -f m_1 g \cos(\alpha) x_1, \quad A_{M_{\text{тр}}} = -M_{\text{тр}} \phi_4 = -f_1 m_4 g \cos(\beta) \phi_4.$$

Остаточно запишемо вираз для роботи зовнішніх сил:

$$A = A_{G_1} + A_{G_4} + A_{F_{\text{тр}}} + A_{M_{\text{тр}}} = P_1 x_1 + P_4 x_{C_4} + M_{\text{тр}} \phi_4, \quad (4.11)$$

де P_1, P_4 – проекції зовнішніх сил ваги тіл 1 і 4 на напрями їхнього руху, $M_{\text{тр}}$ – проекція моменту опору коченню на вісь тіла 4 відповідно

$$\begin{aligned} P_1 &= m_1 g (\sin(\alpha) - f \cos(\alpha)), \\ P_4 &= m_4 g \cos(\beta), \\ M_{\text{тр}} &= -f_1 m_4 \cos(\beta). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Тепер скористаємось кінематичними співвідношеннями між швидкостями тіл системи:

$$\omega_2 = v_1 \frac{1}{R_2}, v_A = \omega_2 r_2 = v_1 \frac{r_2}{R_2}, \omega_3 = v_A \frac{1}{R_3} = v_1 \frac{r_2}{R_2 R_3};$$

$$v_B = \omega_3 r_3 = v_1 \frac{r_2 r_3}{R_2 R_3}, v_D = v_B;$$

$$\omega_4 = v_D \frac{1}{2R_4} = v_1 \frac{r_2 r_3}{2R_2 R_3 R_4}; v_{C4} = \omega_4 R_4 = v_1 \frac{r_2 r_3}{2R_2 R_3}.$$

Для подальшого розгляду введемо позначення $d = \frac{r_2 r_3}{R_2 R_3}$ і знайдемо з рівностей (4.11) співвідношення між швидкостями тіл системи:

$$\omega_2 = v_1 \frac{1}{R_2}; \omega_3 = v_1 \frac{d}{r_3}; \omega_4 = v_1 \frac{d}{2R_4}; v_{C4} = v_1 \frac{d}{2}. \quad (4.13)$$

Після інтегрування цих рівностей з урахуванням того, що у початковому стану система знаходилась у спокої, отримуємо співвідношення між кутами обертання та переміщеннями тіл системи:

$$\varphi_2 = x_1 \frac{1}{R_2}; \varphi_3 = x_1 \frac{d}{r_3}; \varphi_4 = x_1 \frac{d}{2R_4}; x_{C4} = x_1 \frac{d}{2}. \quad (4.14)$$

Перепишемо вираз для кінетичної енергії системи тіл (4.10) з урахуванням співвідношень (4.13):

$$T = \left[\frac{m_1}{2} + \frac{J_2}{2} \cdot \left(\frac{1}{R_2} \right)^2 + \frac{J_3}{2} \cdot \left(\frac{d}{r_3} \right)^2 + \frac{m_4}{2} \cdot \left(\frac{d}{2} \right)^2 + \frac{J_4}{2} \cdot \left(\frac{d}{2R_4} \right)^2 \right] v_1^2, \quad (4.15)$$

а також для роботи зовнішніх сил, які діють на тіла системи (4.11), з урахуванням співвідношень (4.14):

$$A = \left[P_1 + \frac{P_4 \cdot d}{2} + \frac{M_{\text{тр}} \cdot d}{2R_4} \right] x_1. \quad (4.16)$$

Далі, врахувавши (4.15), (4.16) в рівності (4.9), остаточно знайдемо швидкості та прискорення тіл механічної системи в момент часу,

коли тіло 1 зі стану спокою переміститься уздовж поверхні на відстань $x_1 = S$:

$$v_1 = \sqrt{\frac{A^*}{T^*}}, \quad (4.17)$$

$$\text{де } T^* = \left[\frac{m_1}{2} + \frac{J_2}{2} \cdot \left(\frac{1}{R_2} \right)^2 + \frac{J_3}{2} \cdot \left(\frac{d}{r_3} \right)^2 + \frac{m_4}{2} \cdot \left(\frac{d}{2} \right)^2 + \frac{J_4}{2} \cdot \left(\frac{d}{2R_4} \right)^2 \right],$$

$$A^* = \left[P_1 + \frac{P_4 \cdot d}{2} + \frac{M_{\text{тр}} \cdot d}{2R_4} \right] S.$$

Підставляючи у формулу (4.17) вихідні дані (див. табл. 4.4), одержимо такі значення: $T^* = 5,629$ кг, $A^* = 96,258$ Дж, $v_1 = 4,135$ м/с. За цими даними визначимо швидкості, координати центрів мас та кути обертання усіх тіл системи:

$$\omega_2 = v_1 \frac{1}{R_2}, \omega_3 = v_1 \frac{d}{r_3}, \omega_4 = v_1 \frac{d}{2R_4}, v_{C_4} = v_1 \frac{d}{2}; \quad (4.18)$$

$$\varphi_2 = S \frac{1}{R_2}, \varphi_3 = S \frac{d}{r_3}, \varphi_4 = S \frac{d}{2R_4}, x_{C_4} = S \frac{d}{2},$$

а далі одержимо такі значення:

$$\begin{aligned} \omega_2 &= 10,35 \text{ с}^{-1}; \omega_3 = 1,29 \text{ с}^{-1}; \omega_4 = 0,646 \text{ с}^{-1}; v_{C_4} = 0,258 \text{ м/с}; \\ \varphi_2 &= 5 \text{ рад}; \varphi_3 = 0,625 \text{ рад}; \varphi_4 = 0,31 \text{ рад}; x_{C_4} = 0,125 \text{ м}. \end{aligned}$$

Для знаходження прискорень тіл системи скористуємось теоремою про зміну кінетичної енергії в диференціальній формі:

$$\frac{dT}{dt} = W, \quad (4.19)$$

де T – кінетична енергія системи тіл; W – потужність зовнішніх сил, а також рівністю (4.15) для визначення похідної від кінетичної енергії:

$$\frac{dT}{dt} = \partial T^* \cdot v_1 \cdot a_1, \quad (4.20)$$

$$\text{де } \partial T^* = \left[m_1 + J_2 \cdot \left(\frac{1}{R_2} \right)^2 + J_3 \cdot \left(\frac{d}{r_3} \right)^2 + m_4 \cdot \left(\frac{d}{2} \right)^2 + J_4 \cdot \left(\frac{d}{2R_4} \right)^2 \right], \quad a_1 = \dot{v}_1 -$$

прискорення тіла 1, яке здійснює поступальний рух уздовж нерухомої шорсткої поверхні зі швидкістю \vec{v}_1 .

Потужність сил дорівнює роботі зовнішніх сил у одиницю часу, тобто вона може визначатись як добуток сили на відповідну швидкість:

$$W = W_{G_1} + W_{G_4} + W_{F_{\text{тр}}} + W_{M_{\text{тр}}} = P_1 \cdot v_1 + P_4 \cdot v_{C_4} + M_{\text{тр}} \cdot \omega_4. \quad (4.21)$$

Враховуючи співвідношення (4.9), перепишемо (4.21) так:

$$W = W^* v_1, \quad W^* = P_1 + P_4 \frac{d}{2} + M_{\text{тр}} \frac{d}{2R_4}. \quad (4.22)$$

Використавши далі (4.20), (4.22) у рівності (4.19), остаточно знайдемо прискорення тіл механічної системи в момент часу, коли тіло 1 з положення спокою переміститься уздовж поверхні на відстань $x_1 = S$:

$$a_1 = \frac{W^*}{\partial T^*}. \quad (4.23)$$

Із співвідношень (4.18) після диференціювання знайдемо прискорення тіл системи:

$$\varepsilon_2 = a_1 \frac{1}{R_2}, \quad \varepsilon_3 = a_1 \frac{d}{r_3}, \quad \varepsilon_4 = a_1 \frac{d}{2R_4}, \quad a_{C_4} = a_1 \frac{d}{2}. \quad (4.24)$$

Підставляючи у вирази (4.20) та (4.22) вихідні дані та використовуючи (4.23), одержимо, що $\partial T^* = 11,258 \text{ кг}$, $W^* = 48,13 \text{ Н}$, $a_1 = 4,37 \text{ м/с}^2$. За цими даними з (4.24) визначимо прискорення тіл системи:

$$\varepsilon_2 = 10,7 \text{ с}^{-2}; \quad \varepsilon_3 = 1,33 \text{ с}^{-2}; \quad \varepsilon_4 = 0,668 \text{ с}^{-2}; \quad a_{C_4} = 0,267 \text{ м/с}^2.$$

Таким чином, застосувавши теореми про зміну кінетичної енергії в інтегральній та диференціальній формах для розглянутої у завданні системи тіл, визначено швидкості й прискорення тіл системи в момент часу, коли тіло 1 з положення спокою перемістилось уздовж поверхні на відстань $S = 2$ м.

Далі виконаємо дослідження руху системи у часі, застосувавши диференціальні рівняння тіл системи, отриманих із загальних теорем динаміки, які зводяться до інтегрування систем диференціальних рівнянь з початковими умовами. Для виконання дослідження використаємо ПК КіДиМ.

4.2.2. Дослідження руху механічної системи з використанням інформаційних технологій. Нехай для механічної системи тіл, яку розглянуто в попередньому підрозділі і представлено розрахунковою схемою (див. рис. 4.11) з вихідними даними (див. табл. 4.4), необхідно визначити швидкості та прискорення її тіл у довільний момент часу. Для опису моделі системи скористаємось правилами ПК КіДиМ. Представимо систему такою, що складається з інерційних та силових елементів, структуру яких було подано у 1-му розділі. Поступальний рух тіла 1 описують однією координатою x_1 , тому у моделі, що аналізується, цьому тілу відповідатиме інерційний елемент $J.x_1$. Тіла 2 та 3 здійснюють обертальний рух, який описують координатами φ_2 та φ_3 , їм відповідатимуть інерційні елементи $J.\varphi_2$ та $J.\varphi_3$. Котушка 4 здійснює плоскопаралельний рух, який описують координатами x_{C4} та φ_4 , тому у моделі ПК КіДиМ котушці відповідатимуть два інерційні елементи $J.x_{C4}$ та $J.\varphi_4$.

Силові елементи фактично являють собою проекції зовнішніх сил механічної системи на відповідні напрямки (напрямки відліку локальних координат елементів):

$$\begin{aligned} P.x_1 &= m_1 g (\sin \alpha - f \cos \alpha); \\ P.x_{C4} &= m_4 g \sin \beta; \\ P.\varphi_4 &= M_{\text{тр}}, \quad M_{\text{тр}} = -f_1 m_4 g \cos \beta. \end{aligned}$$

Рухи вказаних інерційних елементів пов'язані поміж собою, кінематичні рівняння зв'язку можна одержати з виразу (4.13):

$$\varphi_2 = \frac{x_1}{R_2}; \quad \varphi_3 = \frac{\varphi_2 \cdot r_2}{R_3}; \quad \varphi_4 = \frac{\varphi_3 \cdot r_3}{2R_4}; \quad x_{C_4} = \varphi_4 \cdot R_4.$$

Рух системи розпочинається із положення спокою, тому початкові умови можуть бути сформульовані таким чином:

$$x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0.$$

Далі задачу розв'язують шляхом чисельного інтегрування на заданому інтервалі часу $[0, t_*]$, прийнявши, наприклад, t_* рівним часу, за який тіло 1 зі стану спокою переміститься уздовж поверхні на відстань S (м). Це дозволить не тільки одержати переміщення тіл, швидкості й прискорення як функції часу, а й порівняти їхні значення з тими, що одержані за попередніми аналітичними дослідженнями. З цією метою складемо файл вихідної інформації для ПК КіДиМ.

Текст файлу

```
РАБОТА := № 4.2 Дослідження динаміки механічної системи;
ВЫПОЛНИЛ := студент Іванов П.С., гр. І-17а;
# x1, fi2, fi3, xc4, fi4 - координати тіл #
# Параметри інерції тіл системи: #
J.x1=m1; J.fi2=J2; J.fi3=J3; J.xc4=m4; J.fi4=J4;
# Проекції активних сил на відповідні координати #
P.x1=P1; P1=m1*g*(sin(alfa)-f*cos(alfa));
P.xc4=P4; P4=m4*g*sin(betta);
P.fi4=Mtr; Mtr=-f1*m4*g*cos(betta);
# Моменти інерції тіл системи #
J2=m2*ro2^2; J3=m3*ro3^2; J4=m4*R4^2/2;
# Співвідношення між координатами тіл системи #
fi2=x1/R2; fi3=x1*d/r3; fi4=x1*d/(2*R4); xc4=x1*d/2;
d=r2*r3/(R2*R3);
# Визначення швидкостей та прискорень #
v1=x1't; a1=x1't't; vc4=xc4't; a4=xc4't't;
omega2=fi2't; epsilon2=fi2't't;
omega3=fi3't; epsilon3=fi3't't;
```

```

omega4=fi4't; epsilon4=fi4't't;
# Вихідні дані #
r=0.1; m=1;
m1=10*m; m2=4*m; m3=6*m; m4=8*m;
R2=4*r; r2=r; ro2=2*r; R3=8*r; r3=4*r; ro3=6*r; R4=4*r;
f=0.1; f1=0.4*r;
alfa=pi/6; betta=pi/3; S=2;
#Визначення кінетичної енергії (Ts) та роботи (A)#
Ts=0.5*(m1*v1^2+J2*omega2^2+J3*omega3^2+
J4*omega4^2+m4*vc4^2);
A=P1*x1+P4*xc4+Mtr*fi4;
#Визначення похідної за часом від кінетичної енергії та
потужності #
dT=m1*v1*a1+J2*omega2*epsilon2+J3*omega3*epsilon3
+J4*omega4*epsilon4+m4*vc4*a4;
Ws=P1*v1+P4*vc4+Mtr*omega4;
# Порівняння аналітичних розв'язків з чисельними #
v1k=sqrt(Ak/T');
T'=m1/2+J2*(1/R2)^2/2+J3*(d/r3)^2/2+
J4*(d/(2*R4))^2/2+m4*(d/2)^2/2;
Ak=(P1+P4*d/2+Mtr*d/(2*R4))*S;
Tk=v1k^2*T';
alk=W'/dT';
dT'=m1+J2*(1/R2)^2+J3*(d/r3)^2+
J4*(d/(2*R4))^2+m4*(d/2)^2;
W'=P1+P4*d/2+Mtr*d/(2*R4);
dTk=dT'*alk*v1k; Wk=W'*v1k;
tk=0.967284;
# Інструкції до розв'язку та представлення результатів #
НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ:=t(0), x1(0), x1't(0);
КОНЕЧНЫЕ УСЛОВИЯ:= x1(S), t(tk);
ПЕЧАТАТЬ:=x1, v1(x1), vc4(xc4), a1(v1), a4(vc4);
СРАВНИТЬ:=швидкості(v1,v1k,vc4),
прискорення(a1,alk,a4), енергії і роботи(Ts,A,Tk,Ak),
потужності(dT,Ws,dTk,Wk),
кутові швидкості(omega2,omega3,omega4),
кутові прискорення(epsilon2, epsilon3, epsilon4);
РАСЧЕТ:=ПЕЧАТЬ УРАВНЕНИЙ;
КОНЕЦ;

```

У файлі вихідних даних прийняті наступні позначення: $\mathbf{x1}$, $\mathbf{fi2}$, $\mathbf{fi3}$, $\mathbf{xc4}$, $\mathbf{fi4}$ – координати, за допомогою яких описується рух елементів системи (між цими координатами існують зв'язки відповідно до формули (4.12)); $\mathbf{P1}$, $\mathbf{P4}$, \mathbf{Mtr} – проекції активних сил і моментів на вказані координати (згідно з формулою (4.14)); $\mathbf{J3}$, $\mathbf{J3}$, $\mathbf{J4}$ – моменти інерції тіл системи, які здійснюють обертальний або плоскопаралельний рухи; $\mathbf{v1}$, $\mathbf{a1}$ – швидкість та прискорення точок тіла 1; $\mathbf{vc4}$, $\mathbf{a4}$ – швидкість та прискорення центра мас тіла 4; $\mathbf{omega2}$, $\mathbf{omega3}$, $\mathbf{omega4}$ – кутові швидкості тіл системи, які здійснюють обертальний або плоскопаралельний рухи; $\mathbf{epsilon2}$, $\mathbf{epsilon2}$, $\mathbf{epsilon2}$ – кутові прискорення тіл системи, які здійснюють обертальний або плоскопаралельний рухи; \mathbf{r} – параметр геометричних розмірів (може набувати будь-якого значення); \mathbf{m} – масовий параметр (може набувати будь-якого значення); $\mathbf{R2}$, $\mathbf{r2}$, $\mathbf{R3}$, $\mathbf{r3}$, $\mathbf{R4}$ – радіуси відповідних елементів системи; $\mathbf{ro2}$, $\mathbf{ro3}$ – радіуси інерції складених тіл обертання; $\mathbf{m1}$, $\mathbf{m2}$, $\mathbf{m3}$, $\mathbf{m4}$ – маси елементів системи; \mathbf{f} – коефіцієнт тертя ковзання (для тіла 1); $\mathbf{f1}$ – коефіцієнт третя кочення (для тіла 2); \mathbf{alfa} , \mathbf{betta} – кути нахилу відповідних площин; \mathbf{S} – шлях, який проходить тіло 1; \mathbf{Ts} – кінетична енергія системи як функція часу (згідно з формулою (4.10)); \mathbf{A} – сумарна робота активних сил, як функція часу (згідно з формулою (4.10)); \mathbf{dT} – похідна за часом від кінетичної енергії системи як функція часу (згідно з формулою (4.20)); \mathbf{Ws} – сумарна потужність активних сил, як функція часу (згідно з формулою (4.21)); $\mathbf{v1k}$ – значення швидкості точок тіла 1, яке одержане аналітично (згідно з формулою (4.17)); $\mathbf{T'}$ – коефіцієнт T^* з формули (4.17); \mathbf{Ak} – значення сумарної роботи активних сил, яке відповідає тому моменту часу, коли координата $x1$ досягне значення S (згідно з формулою (4.16)); \mathbf{Tk} – значення кінетичної енергії системи, яке відповідає тому моменту часу, коли координата $x1$ досягне значення S (згідно з формулою (4.16)); $\mathbf{a1k}$ – значення прискорення точок тіла 1, яке одержане аналітично (згідно з формулою (4.23)); $\mathbf{dT'}$ – коефіцієнт ∂T^* з формули (4.20); $\mathbf{W'}$ – коефіцієнт W^* з формули (4.22);

dT_k – значення похідної від кінетичної енергії, яке відповідає тому моменту часу, коли координата x_1 досягне значення S (згідно з формулою (4.20)); w_k – значення сумарної потужності активних сил, яке відповідає тому моменту часу, коли координата x_1 досягне значення S (згідно з формулою (4.22)); t_k – кінцевий момент часу (у даному випадку підібраний таким чином, щоб значення координати x_1 дорівнювало S). В інструкції «**КОНЕЧНЫЕ УСЛОВИЯ**» вказано два записи (« $x_1(S)$ », « $t(t_k)$ »), тому інтегрування закінчиться або коли координата x_1 досягне значення S , або коли час – величини t_k . В даному випадку виконана перша умова (рис. 4.13). На рисунку 4.14 наведено залежність швидкості тіла 1 від його переміщення. Значення швидкості, яке відповідає переміщенню $x_1 = S$ співпадає із значенням, одержаним аналітично (див. п. 4.2.1). Більш наочне порівняння можна зробити, якщо побудувати у одному масштабі з графіком $v_1(t)$ лінію, яка відповідає значенню швидкості v_{1k} тіла 1, одержаному аналітично (рис. 4.15).

У момент часу $t_* = 0,967284$ с графік $v_1(t)$ перетинається із лінією, яка відповідає v_{1k} , що свідчить про правильність аналітичних розрахунків, проведених у п. 4.2.1. Також наведено графік залежності швидкості центра мас котушки 4 від часу (див. рис. 4.15). Слід відзначити, що швидкість тіла 1 та швидкість центра мас котушки 4 залежать від часу лінійно.

Далі наведемо інші основні результати розрахунків. На рисунку 4.14 представлено залежність кутових швидкостей тіл 2 та 3 та миттєвої кутової швидкості котушки 4 від часу, а на рисунку 4.15 – відповідно залежності кутових прискорень. Аналізуючи ці результати, можна зробити висновок, що елементи механічної системи рухаються рівноприскорено.

Крім цього, засоби ПК КіДиМ дозволяють наочно переконатися у виконанні загальних теорем динаміки механічних систем. Для цього слід побудувати у однаковому масштабі графіки залежності від часу кінетичної енергії та роботи, похідної від кінетичної енергії за часом та потужності. Текст файлу вхідної інформації (див. табл. 4.5) надає таку можливість. Якщо розглянути порівняння кінетичної енергії T_s та ро-

боти A , можна переконатися, що їхні графіки співпадають, так само співпадають графіки похідної за часом від кінетичної енергії dT та потужності Ws .

На рисунках 4.18 та 4.19 наведено порівняння для кінетичної енергії та потужності із відповідним значеннями, одержаними аналітично для моменту часу $t^* = 0,967284$ с. Збіг значень у кінцевий момент часу свідчить про правильність проведеного розв'язку.

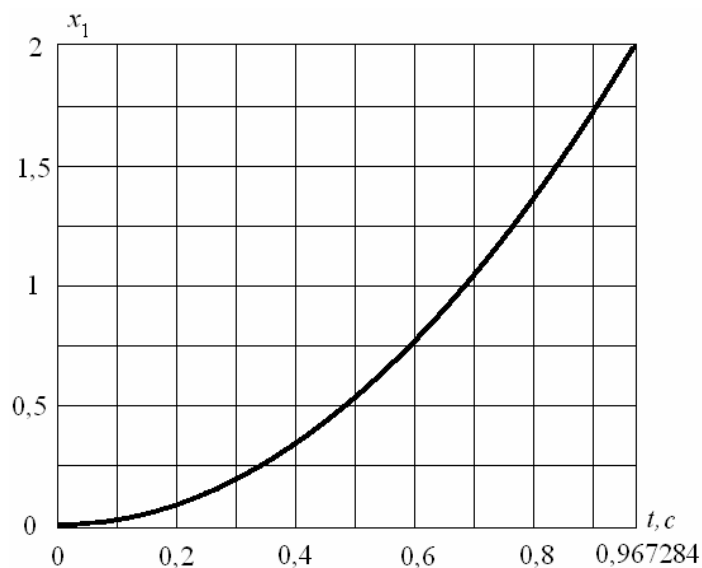


Рисунок 4.13 – Залежність переміщення тіла 1 від часу

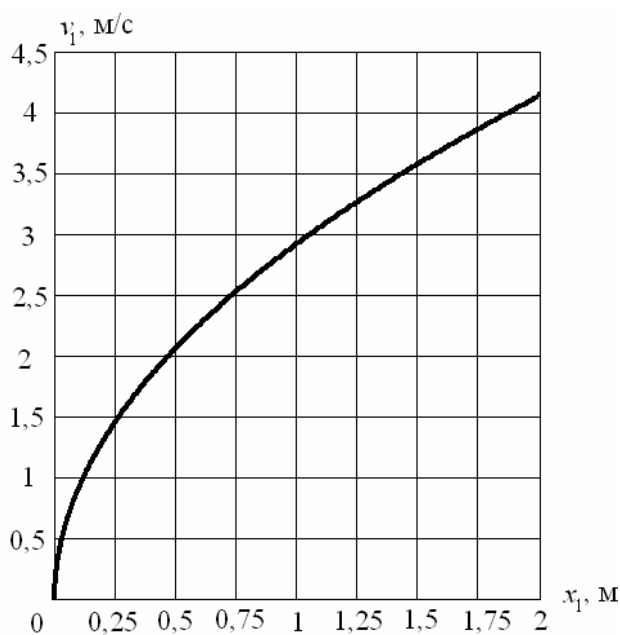


Рисунок 4.14 – Залежність швидкості тіла 1 від переміщення

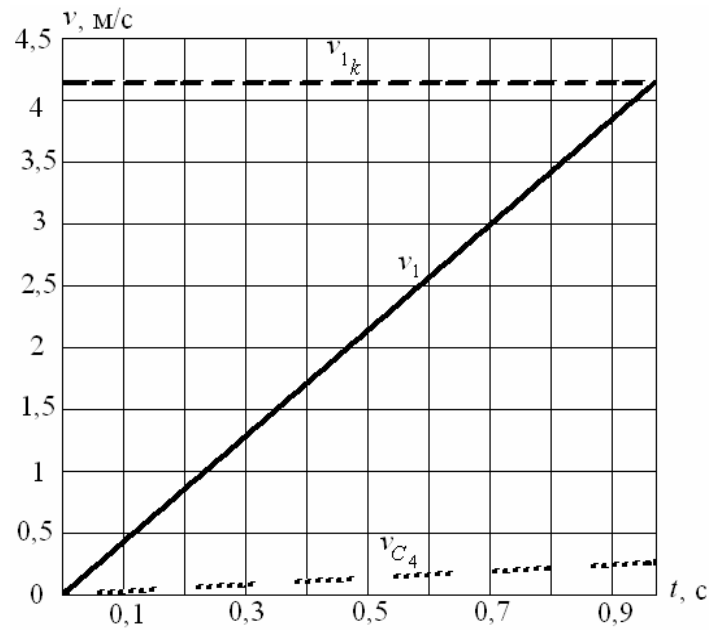


Рисунок 4.15 – Порівняння швидкостей

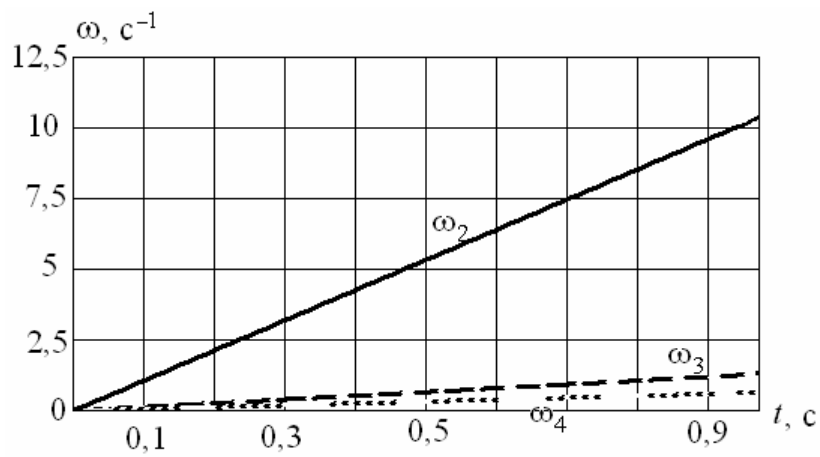


Рисунок 4.16 – Порівняння кутових швидкостей

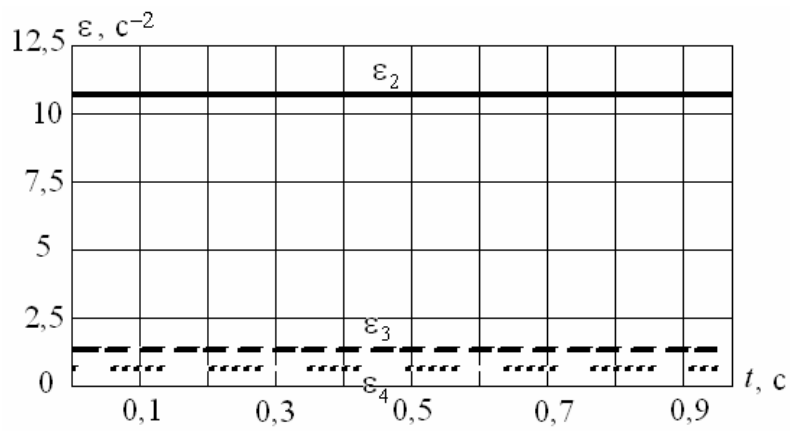


Рисунок 4.17 – Порівняння кутових прискорень

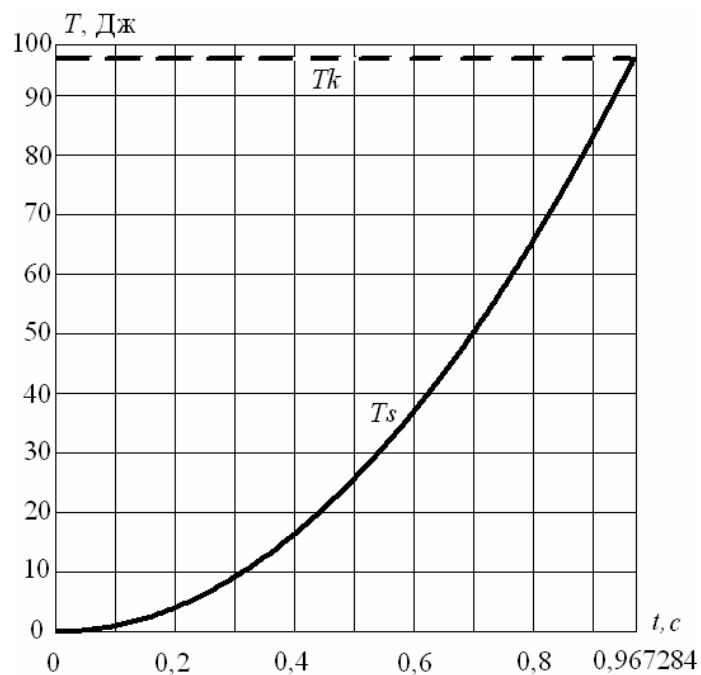


Рисунок 4.18 – Порівняння кінетичної енергії, підрахованої аналітично T_k та кінетичної енергії як функції часу T_s

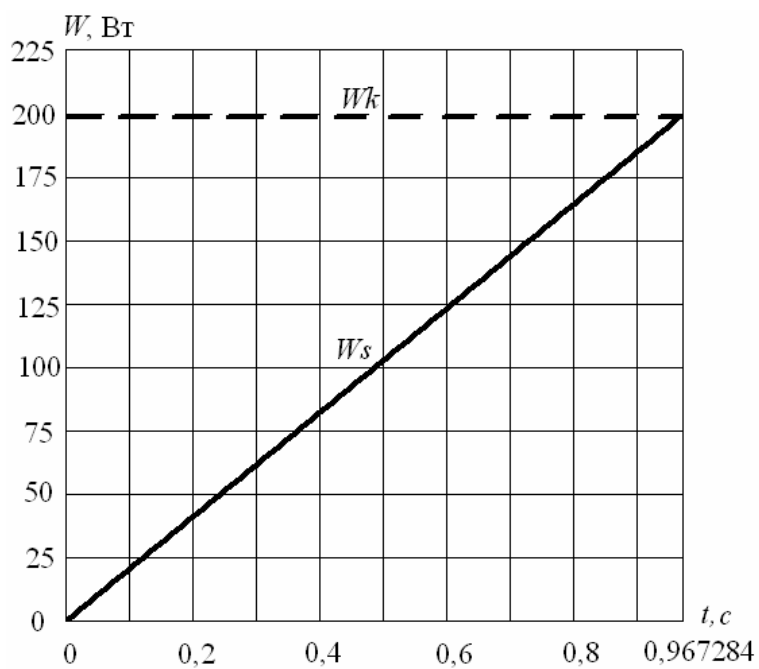
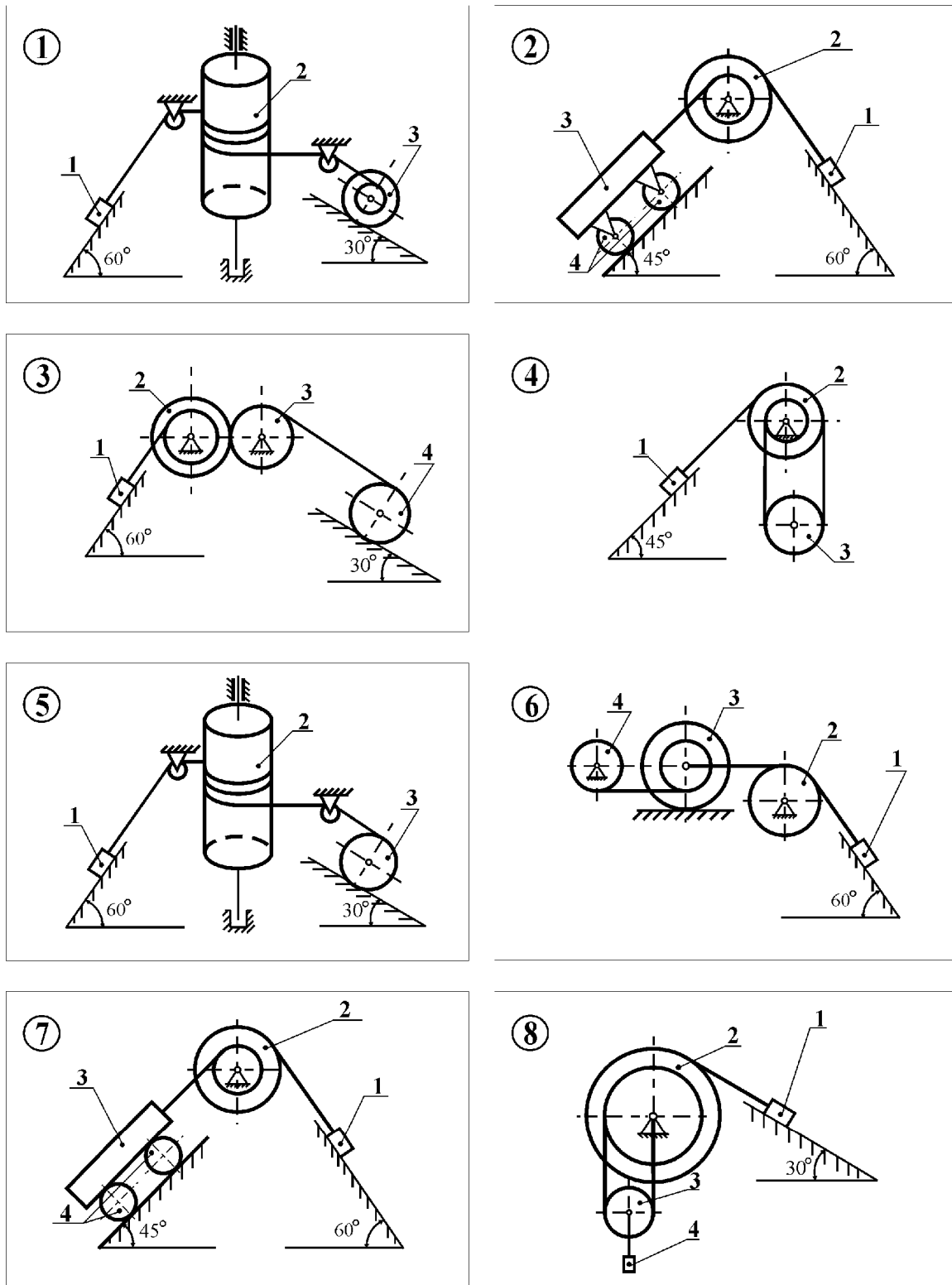


Рисунок 4.19 – Порівняння потужності, підрахованої аналітично W_k та потужності як функції часу W_s

4.2.3. Завдання для самостійної роботи. Для варіантів механічних систем (див. табл. 4.5) та вихідних даних (табл. 4.6) необхідно:

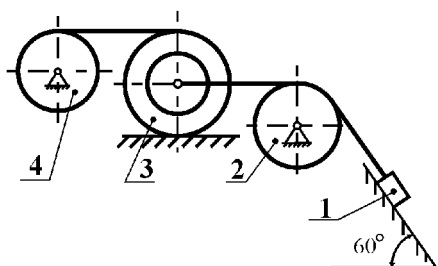
- 1) встановити кінематичні в'язі між елементами механічних систем;
- 2) записати вирази для кінетичної енергії системи, потужності системи та роботи сил;
- 3) використовуючи теореми про зміну кінетичної енергії системи, визначити швидкість та прискорення тіла 1;
- 4) скласти файл вихідної інформації для ПК КіДиМ;
- 5) дослідити рух механічної системи.

Таблиця 4.5 – Варіанти завдань для аналізу руху механічних систем

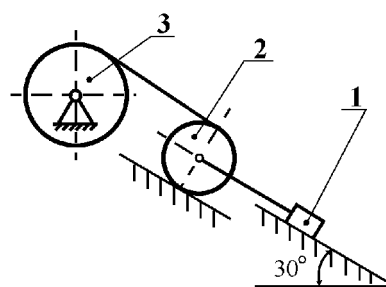


Продовження табл. 4.5

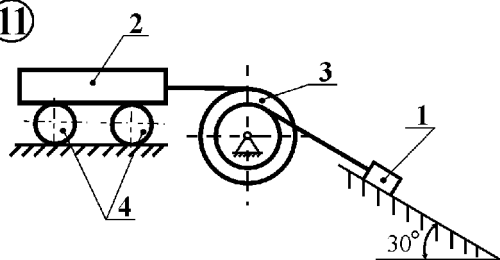
⑨



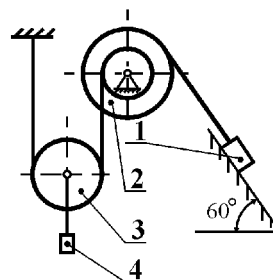
⑩



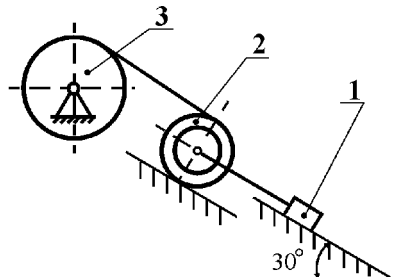
⑪



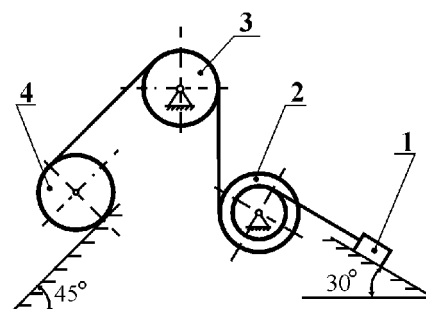
⑫



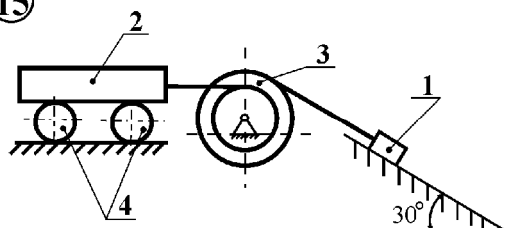
⑬



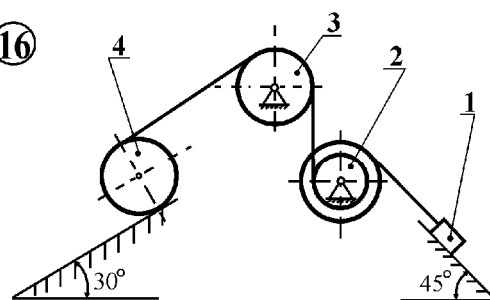
⑭



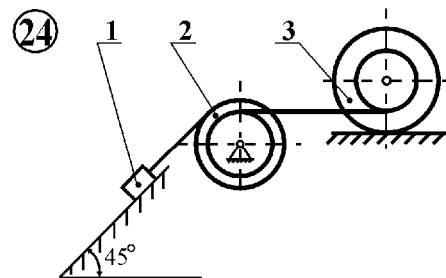
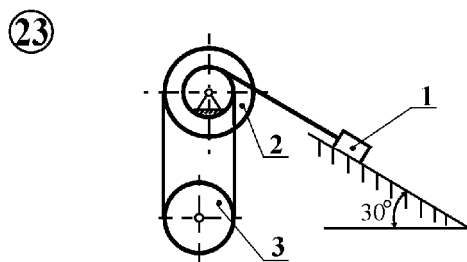
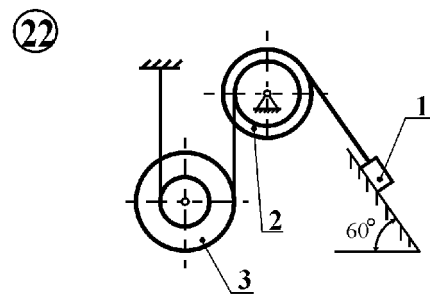
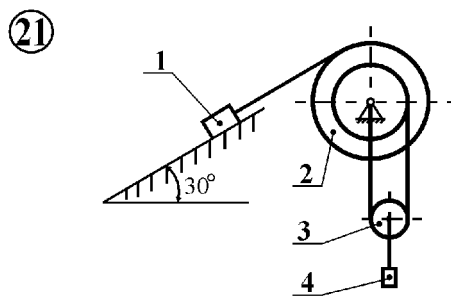
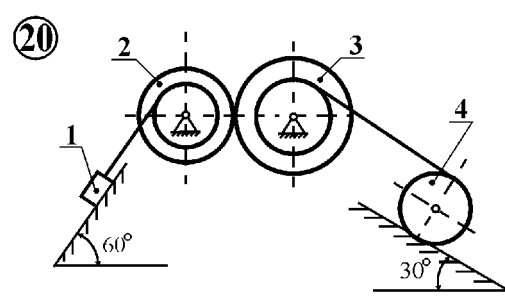
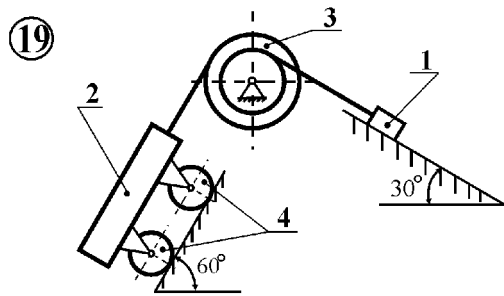
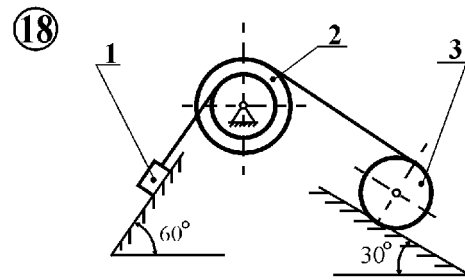
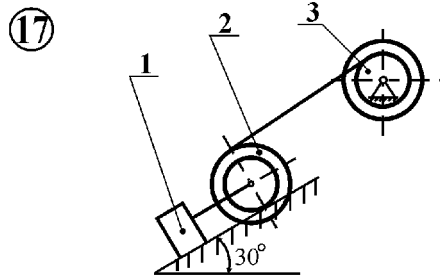
⑮



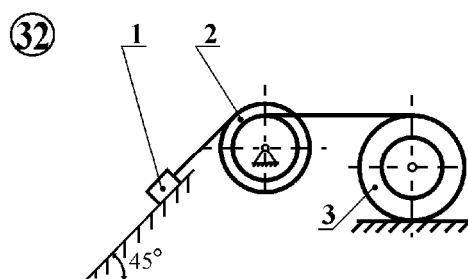
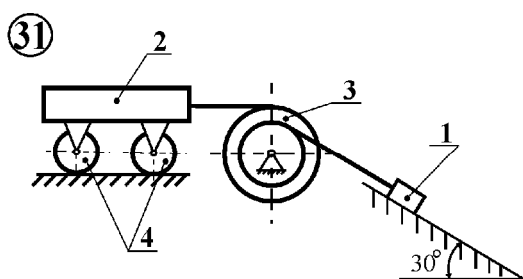
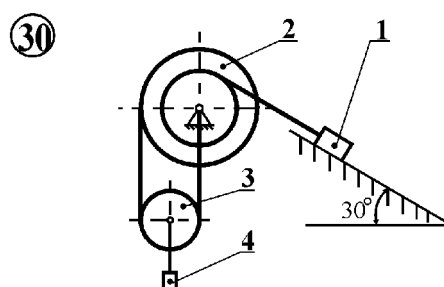
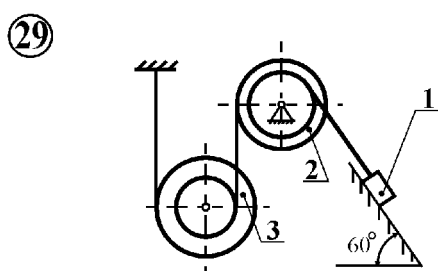
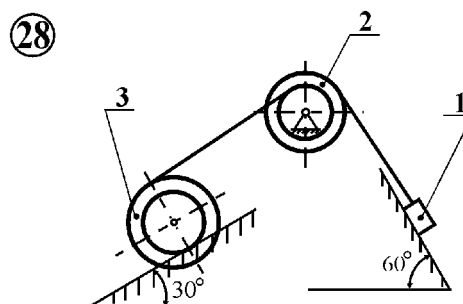
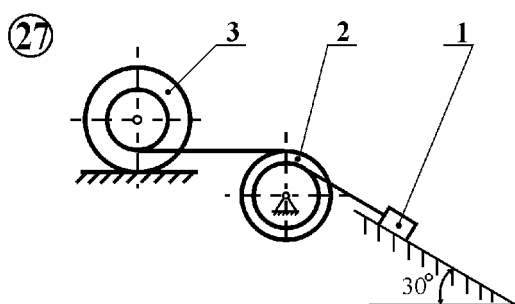
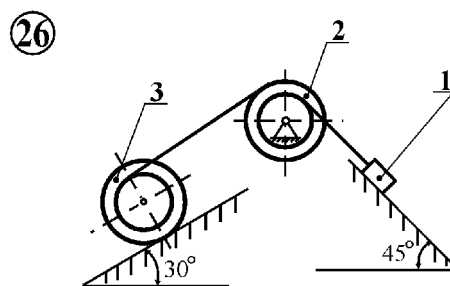
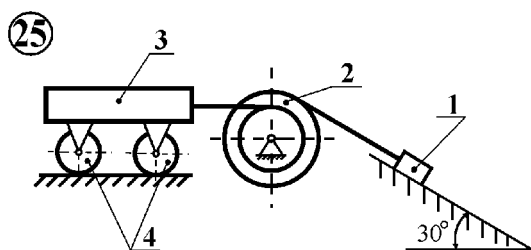
⑯



Продовження табл. 4.5



Продовження табл. 4.5



Таблиця 4.6 – Вихідні дані

№ варіанта	m_1	m_2	m_3	m_4	R_2	r_2	ρ_2
1	$10m$	$6m$	m	—	$4r$	—	—
2	$10m$	$6m$	$2m$	m	$6r$	$2r$	$4r$
3	$10m$	$6m$	$2m$	m	$4r$	$2r$	$3r$
4	$8m$	$6m$	$2m$	—	$6r$	$2r$	$4r$
5	$10m$	$6m$	$2m$	—	$4r$	—	—
6	$16m$	$4m$	$6m$	$2m$	$6r$	—	—
7	$10m$	$2m$	m	m	$8r$	$2r$	$4r$
8	$10m$	$4m$	$2m$	m	$10r$	$8r$	$4r$
9	$10m$	$6m$	$4m$	m	$6r$	—	—
10	$19m$	$6m$	$6m$	—	$4r$	—	—
11	$10m$	$2m$	m	m	—	—	—
12	$10m$	$4m$	$6m$	m	$10r$	r	$6r$
13	$10m$	$6m$	$2m$	—	$6r$	$3r$	$4r$
14	$10m$	$4m$	$2m$	$2m$	$6r$	$3r$	$4r$
15	$20m$	$2m$	$2m$	$6m$	—	—	—
16	$10m$	$6m$	$2m$	$2m$	$10r$	$4r$	$8r$
17	$14m$	$6m$	m	—	$10r$	$4r$	$8r$
18	$10m$	$4m$	m	—	$6r$	$2r$	$4r$
19	$10m$	$4m$	m	$2m$	—	—	—
20	$10m$	$6m$	$6m$	$2m$	$14r$	$2r$	$6r$
21	$10m$	$6m$	$2m$	$2m$	$6r$	$2r$	$4r$
22	$20m$	$10m$	$4m$	—	$6r$	r	$2r$
23	$18m$	$4m$	$2m$	—	$6r$	$2r$	$4r$
24	$14m$	$6m$	$4m$	—	$10r$	$2r$	$4r$
25	$10m$	$4m$	m	m	$14r$	$2r$	$6r$
26	$10m$	$2m$	$2m$	—	$14r$	$2r$	$4r$
27	$10m$	$6m$	$2m$	—	$16r$	$2r$	$8r$
28	$10m$	$4m$	$2m$	—	$16r$	$4r$	$6r$
29	$18m$	$8m$	$4m$	—	$12r$	$4r$	$4r$
30	$28m$	$10m$	$2m$	m	$14r$	$2r$	$8r$
31	$10m$	$6m$	$4m$	$2m$	—	—	—
32	$18m$	$6m$	$6m$	—	$14r$	$2r$	$6r$

Продовження табл. 4.6

№ варіанта	R_3	r_3	ρ_3	R_4	f	$f_{т.к.}$	S
1	$8r$	$2r$	$4r$	—	0,01	$0,12r$	3,0
2	—	—	—	$4r$	0,10	$0,11r$	2,0
3	$6r$	—	—	$6r$	0,02	$0,10r$	2,0
4	$6r$	—	—	—	0,03	—	4,0
5	$6r$	—	—	—	0,04	$0,05r$	3,0
6	$6r$	$2r$	$4r$	$6r$	0,05	$0,04r$	2,0
7	—	—	—	$4r$	0,02	$0,10r$	1,0
8	$6r$	—	—	—	0,06	—	4,0
9	$6r$	$2r$	$4r$	$6r$	0,07	$0,14r$	2,0
10	$4r$	—	—	—	0,08	—	2,0
11	$14r$	$4r$	$8r$	$6r$	0,09	$0,04r$	1,0
12	$6r$	—	—	—	0,10	—	1,0
13	$4r$	—	—	—	0,12	$0,06r$	2,0
14	$4r$	—	—	$4r$	0,11	$0,10r$	2,0
15	$16r$	$2r$	$6r$	$4r$	0,13	$0,08r$	2,0
16	$4r$	—	—	$4r$	0,14	$0,05r$	0,6
17	$14r$	$2r$	$6r$	—	0,20	$0,05r$	1,0
18	$6r$	—	—	—	0,15	$0,09r$	4,0
19	$14r$	$2r$	$6r$	$4r$	0,16	$0,07r$	2,0
20	$14r$	$3r$	$4r$	$6r$	0,17	$0,10r$	1,0
21	$4r$	—	—	—	0,18	—	1,0
22	$18r$	$4r$	$6r$	—	0,20	—	2,0
23	$4r$	—	—	—	0,10	—	1,0
24	$14r$	r	$6r$	—	0,09	$0,04r$	4,0
25	—	—	—	$6r$	0,08	$0,06r$	4,0
26	$15r$	$3r$	$6r$	—	0,07	$0,07r$	4,0
27	$14r$	$2r$	$4r$	—	0,06	$0,08r$	4,0
28	$18r$	$2r$	$4r$	—	0,05	$0,09r$	4,0
29	$18r$	$4r$	$6r$	—	0,04	—	2,0
30	$4r$	—	—	—	0,03	—	1,0
31	$18r$	$4r$	$6r$	$3r$	0,02	$0,10r$	2,0
32	$16r$	$2r$	$4r$	—	0,10	$0,11r$	2,0

Питання для самоконтролю

1. Що таке механічні коливання?
2. Які існують види механічних коливань?
3. Які сили викликають коливання у механічних системах?
4. Які сили діють на матеріальну точку при власних коливаннях?
5. Які сили діють на матеріальну точку при затухаючих коливаннях?
6. Які сили діють на матеріальну точку при вимушених коливаннях?
7. Що характеризує власна частота коливань?
8. Що таке амплітуда власних коливань та від чого вона залежить?
9. За яких умов виникають затухаючі коливання, а за яких – аперіодичний рух?
10. Що вивчають за допомогою амплітудно-частотної характеристики?
11. При яких умовах виникає явище резонансу?
12. Чим небезпечний резонанс у механічних системах?
13. Яким чином виконуються перетворення у системах пружних елементів?
14. У чому полягає сутність теореми про зміну кінетичної енергії?
15. Які кінематичні характеристики можна визначати за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії за скінчений проміжок часу?
16. Які кінематичні характеристики можна визначати за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії за нескінченно малий проміжок часу?
17. За якою формулою визначається робота сили тяжіння?
18. Робота сил тертя ковзання є додатною чи від'ємною?
19. Скільки координат потрібно у ПК КіДиМ для опису плоско-паралельного руху тіла?

5. АНАЛІТИЧНА МЕХАНІКА

5.1. Теоретичний матеріал

Аналітична механіка надає ефективні можливості для дослідження руху механічних систем. При складанні рівнянь руху механічної системи зазвичай використовують вирази її кінетичної та потенціальної енергій.

Механічна (матеріальна) система – це сукупність матеріальних точок та (або) тіл, для якої рух кожної окремої точки (або тіла) з цієї сукупності залежить від руху та положення інших точок (або тіл). Це означає, що між точками, які складають механічну систему, існують в'язі та сили взаємодії (внутрішні сили). На неї можуть діяти також і зовнішні сили. В'язі, які накладені на систему, обмежують довільні положення або швидкості її точок при русі. Систему із накладеними на неї в'язями називають **невільною**. Положення механічної системи визначають декартовими координатами x_ν, y_ν, z_ν ($\nu = 1, 2, \dots, N$), де N – кількість точок системи. Зауважимо, якщо до механічної системи включені абсолютно тверді тіла, то для них можна використовувати, якнайменш, декартові координати трьох точок при просторовому русі або двох точок – при плоскому русі. У найпростішому випадку тверде тіло представляють у вигляді матеріальної точки.

В'язі, які накладені на систему, задають аналітичними рівняннями у вигляді рівностей або нерівностей для функцій від координат (**геометричні голономні в'язі**) та швидкостей (**кінематичні в'язі**), а можливо, і від часу (**реономні**). Коли час не входить у рівняння в'язь вважається **склерономною**. Якщо рівняння кінематичної в'язі шляхом інтегрування можна привести до виду, що не містить похідних від координат за часом, в'язь буде **голономною**, у противному випадку – **неголономною**. В'язь називають **утримуючою**, коли рівнянням для неї буде рівність, інакше в'язь називається **неутримуючою**.

У подальшому будемо розглядати лише склерономні утримуючі голономні в'язі. Невільні механічні системи з такими в'язями будемо називати **склерономними голономними механічними системами**.

Прийняті обмеження не є суттєвими для великого класу механічних систем, які зустрічаються у реальності. Однак для виводу рівнянь руху при цих обмеженнях можна використовувати рівняння Лагранжу другого роду в узагальнених, часто недекартових координатах.

Узагальненими координатами механічної системи називають параметри будь-якої розмірності, які цілковито визначають її положення, тобто положення кожної точки системи. Незалежні (істинні) узагальнені координати – це ті координати, які обирають з усіх параметрів у мінімальній кількості та якими взаємно однозначно визначають положення точок системи.

При накладених на механічну систему геометричних в'язей, що представлено незалежними рівняннями в'язей, кількість яких дорівнює k , число незалежних узагальнених координат буде дорівнювати $3N - k$. Дійсно, якщо на $3N$ координат наложено k незалежних рівнянь в'язей, то розв'язавши ці рівняння відносно будь-яких k координат, можливо виразити їх через інші $3N - k$ координат, и тим самим визначити положення точок механічної системи через довільні їх значення (варіації узагальнених координат).

По визначенню, числом ступенів вільності системи матеріальних точок називають **число незалежних варіацій узагальнених координат**. За наявності голономних стаціонарних в'язей, координати точок системи однозначно визначають через незалежні узагальнені координати:

$$x_v = x(q_1, q_2, \dots, q_s); \quad y_v = y(q_1, q_2, \dots, q_s); \quad z_v = z(q_1, q_2, \dots, q_s); \\ v = 1, 2, \dots, N.$$

Тут s – число ступенів вільності системи, $s = 3N - k$; k – число незалежних рівнянь в'язей. Величини $\dot{q}_i (i = \overline{1, s})$ називають **узагальненими швидкостями**, а $\ddot{q}_i (i = \overline{1, s})$ – **узагальненими прискореннями**.

Кінетичну енергію голономної склерономної системи можна представити у вигляді однорідної функції 2-го ступеня (квадратичної форми) від узагальнених швидкостей:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^s a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k. \quad (5.1)$$

Ця форма завжди є невід'ємною та позитивно визначеною, причому вона дорівнює нулю тільки тоді, коли усі $\dot{q}_i = 0$, $i = \overline{1, s}$.

Якщо зовнішні сили, які діють на точки голономної склерономної системи, є потенціальними, то виконуються співвідношення:

$$F_{xv} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_v}; \quad F_{yv} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_v}; \quad F_{zv} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_v}, \quad v = \overline{1, N}, \quad (5.2)$$

де $\Pi = \Pi(x_v, y_v, z_v)$ – потенціальна енергія системи; F_{xv} , F_{yv} , F_{zv} – проєкції на координатні осі сил, які діють на точки системи.

Кожній узагальненій координаті q_i відповідає узагальнена сила, яка визначається рівністю

$$Q_i = \sum_{v=1}^N \left(F_{xv} \frac{\partial x_v}{\partial q_i} + F_{yv} \frac{\partial y_v}{\partial q_i} + F_{zv} \frac{\partial z_v}{\partial q_i} \right). \quad (5.3)$$

Для потенціальних сил ця рівність, вочевидь, може бути записана так:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}.$$

Необхідною та достатньою умовою рівноваги матеріальної системи за наявності ідеальних в'язей є рівність нулю узагальнених сил. Умову рівноваги голономної системи у випадку потенціальних сил, що діють на неї, запишемо у вигляді

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \quad i = \overline{1, s}. \quad (5.4)$$

Звідси випливає, що у положенні рівноваги потенціальна енергія голономної системи має екстремальне значення.

Елементарну роботу потенціальних сил знаходимо таким чином:

$$\partial A = \sum_{i=1}^s Q_i \partial q_i = -\partial \Pi.$$

Повна енергія системи дорівнює сумі кінетичної та потенціальної енергій:

$$E = T + \Pi.$$

Кінетичним потенціалом або **функцією Лагранжа** називають різницю кінетичної та потенціальної енергій:

$$L = T - \Pi.$$

У загальному випадку, крім потенціальних сил, які визначаються потенціалом Π , на систему можуть діяти непотенціальні сили, серед яких відокремлюють **гіроскопічні** (їх потужність дорівнює нулю) та **дисипативні**, якщо їх потужність має від'ємне значення:

$$W = \sum_{i=1}^s \tilde{Q}_i \dot{q}_i \leq 0,$$

де $\tilde{Q}_i = \tilde{Q}_i(t, q_j, \dot{q}_j)$ – гіроскопічні або дисипативні непотенціальні узагальнені сили системи.

При русі голономної склерономної системи, коли потенціальна енергія явним чином не залежить від часу, похідна від повної енергії за часом дорівнює потужності непотенціальних сил:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^s \tilde{Q}_i \dot{q}_i.$$

Систему називають **консервативною**, якщо вона є голономною склерономною механічною системою та на неї діють лише потенціальні сили, а потенціальна енергія явним чином не залежить від часу. В цьому випадку повна енергія консервативної системи не змінюється при її русі, тобто зберігається:

$$\frac{dE}{dt} = 0; \quad T + \Pi = T_0 + \Pi_0 = \text{const}, \quad (5.5)$$

де T_0 и Π_0 – початкові значення кінетичної та потенціальної енергій.

Для голономної склерономної системи при дії непотенціальних гіроскопічних сил, потужність яких дорівнює нулю, також має місце закон збереження повної енергії при русі, тобто тут теж $E = T + \Pi = \text{const}$. Якщо ж на таку систему діють дисипативні сили, то її повна енергія убуває під час руху, тобто:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^s \tilde{Q}_i \dot{q}_i \leq 0.$$

Дія дисипативних сил викликає **розсіювання** (дисипацію) енергії.

Якщо до точок механічної системи прикладені сили опору середовища, пропорційні першим ступеням швидкостей точок, то їх дисипативні узагальнені сили системи можуть бути обчислені за формулами:

$$\tilde{Q}_i = - \sum_{k=1}^s \beta_{ik} \dot{q}_k, \quad i = \overline{1, s},$$

де $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ – коефіцієнти опору в'язкого середовища.

Введемо до розгляду позитивно визначену квадратичну форму, яку називають дисипативною функцією Релея:

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^s \beta_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \geq 0.$$

Неважко побачити, що дисипативні узагальнені сили опору в'язкого середовища можуть бути отримані з функції Релея шляхом її диференціювання за узагальненими швидкостями:

$$\tilde{Q}_i = - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = \overline{1, s}. \quad (5.6)$$

Якщо голономна склерономна система рухається під дією потенціальних та непотенціальних дисипативних сил, а потенціальна енергія явно не залежить від часу, то подвоєна функція Релея дорівнює швидкості убуття повної енергії системи, тобто

$$\frac{dE}{dt} = -2R. \quad (5.7)$$

Остання рівність вказує на фізичний сенс функції Релея.

Потужність втрат механічної енергії завдяки наявності сил в'язкого тертя (опору) обчислюють за формулою:

$$W = - \sum_{i=1}^N \mu_i v_i^2,$$

де μ_i – коефіцієнти в'язкого тертя середовища; v_i – швидкості руху точок. Для одновимірного розподілу матеріальних точок уздовж деякого відрізка прямої довжини l при русі у в'язкому середовищі одержимо вираз

$$W = - \int_0^l \mu^* v^2(z) dz, \quad (5.8)$$

де μ^* – значення густини коефіцієнта в'язкого опору середовища, яке при рівномірній густині відповідає $\mu^* = \mu/l$.

Рівняння Лагранжа другого роду у незалежних узагальнених координатах являють собою рівняння руху голономних механічних систем і записуються у вигляді

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1, s}. \quad (5.9)$$

Для складання лівих частин цих рівнянь слід виразити кінетичну енергію:

$$T = \sum_{v=1}^N m_v v_v^2$$

через незалежні узагальнені координати та узагальнені швидкості. Узагальнені сили, що стоять у правих частинах рівнянь, можуть бути знайдені або безпосередньо за формулами, за якими ці сили визначаються, або як коефіцієнти при варіаціях узагальнених координат у виразі для віртуальної роботи:

$$\delta A = \sum_{i=1}^s Q_i \delta q_i .$$

Відзначимо, що розмірність узагальненої сили дорівнює відношенню розмірностей роботи та узагальненої координати.

Для склерономних голономних систем при дії потенційних та дисипативних сил рівняння Лагранжа 2-го роду записують у вигляді

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = \overline{1, s}. \quad (5.10)$$

Рівняння Лагранжу 2-го роду являють собою систему s звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку відносно незалежних узагальнених координат, де s – число незалежних узагальнених координат, або число ступенів вільності. Інтегруванням цих рівнянь одержують узагальнені координати та узагальнені швидкості:

$$q_i = q_i(t), \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i(t), \quad i = \overline{1, s},$$

як функції часу та $2s$ довільних постійних. Тому для задачі про рух невільної механічної системи даний розв'язок із $2s$ довільними постійними є остаточним та може бути конкретизованим шляхом завдання початкових умов, число яких повинно дорівнювати $2s$.

У загальному випадку рівняння можуть бути нелінійними. Для задач про рух механічних систем біля стійкого положення її рівноваги розглядають малі рухи. Тоді узагальненими координатами визначають

відхилення системи від її стійкого положення рівноваги. Відхилення вважають малими, якщо виконується умова:

$$q_i^2 < |q_i|, \quad \dot{q}_i^2 < |\dot{q}_i|, \quad i = \overline{1, s}.$$

У цьому випадку рівняння руху зазвичай є лінійними диференціальними рівняннями 2-го порядку з постійними коефіцієнтами.

Теоремою Лагранжу–Дирихле – **«Якщо для матеріальної механічної системи, яка знаходиться у потенціальному силовому полі, та підпорядкована склерономним голономним в'язям, потенціальна енергія у положенні рівноваги має мінімум, то це положення рівноваги є стійким»** – надається доведення того, що мінімум потенціальної енергії є достатньою ознакою стійкої рівноваги механічної системи. Тому при малих рухах голономних склерономних систем у потенціальному полі сил біля положення стійкої рівноваги узагальнені координати приймають рівними нулю, що задовільняє таку вимогу:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \right|_{q_i=0} = 0, \quad i = \overline{1, s}.$$

У цьому випадку достатньо розглянути у виразах для кінетичної T , потенціальної Π енергій та дисипативної функції R лише ті складові відносно узагальнених координат та швидкостей, які мають менший порядок малості. Складові, які мають більш високий порядок, відкидають. Зазвичай це досягається шляхом розкладання енергій та функції Релея у ряди Тейлора–Маклорена при збереженні у них членів не вище 2-го порядку малості або використанням формул для наближених обчислень із малими величинами також при збереженні у них членів не вище цього порядку малості.

Зауважимо, що за теоремою Ляпунова – **«Якщо відсутність мінімуму потенціальної енергії у досліджуваному положенні рівноваги з'ясовується вже за членами другого порядку (або взагалі за членами найменшого порядку) у розкладенні потенціальної енергії у ряд Тейлора, то рівновага є нестійкою»** – виявляється виправданим сформульований раніше підхід для вивчення малих рухів.

Словник аналітичної механіки

Активні сили. Сили $F(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$, для яких відома залежність від механічного стану системи, та, мабуть, часу, і на цю залежність не ставити впливу накладення або зняття механічних в'язей.

Матеріальна точка. Геометрична точка, якій поставлено у відповідність додатне число – маса m .

Механічна система. Механічною системою називають відокремлену будь-яким способом із простору сукупність матеріальних точок та твердих тіл, які взаємодіють між собою та з оточуючим середовищем.

Замкнена система. Механічна система, матеріальні точки якої взаємодіють лише із точками, належними системі.

Скінченомірна механічна система. Система, яка складена із скінченного числа матеріальних точок и скінченного числа твердих тіл.

Механічні в'язі. Будь-які обмеження стану механічної системи, які аналітично записуються у вигляді рівняння (рівності – $f_l(t, \vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i) = 0$, або нерівності – $f_l(t, \vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i) \leq 0$), які справедливі для початкового стану та під час її руху.

Голономна в'язь (геометрична, скінченна). Механічна в'язь, ліву частину рівняння якої можна представити у вигляді функції $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t)$ від координат точок системи та інколи – часу.

Кінематичні в'язі (диференціальні). Механічні в'язі, ліва частина рівняння яких $f_l(t, \vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i)$ містить, крім координат, також швидкості матеріальних точок та тіл.

Неутримуюча в'язь. В'язь, рівняння якої – нерівність $f_l(t, r_i, \dot{r}_i) \leq 0$, навпаки, **утримуюча** – в'язь, рівняння якої – рівність $f_l(t, r_i, \dot{r}_i) = 0$. Далі як рівняння в'язі будемо писати *рівність*.

Диференціальна в'язь, що інтегрується. Диференціальна в'язь, рівняння якої $f_l(t, r_i, \dot{r}_i) = 0$ допускає еквівалентну заміну на рівняння геометричної в'язі. Наприклад, рівняння $V_1 - V_2 = 0$ можна замінити рівнянням $r_1 - r_2 - c = 0$.

Ідеальна в'язь. В'язь, віртуальна робота реакції якої на будь-якому віртуальному переміщенні дорівнює нулю. Або еквівалентне визначення: в'язь, у якої узагальнені сили її реакцій дорівнюють нулю.

Голономна система. Механічна система, на яку накладені лише *голономні* (геометричні, або диференціальні, що інтегруються) в'язі.

Нестаціонарна система. Механічна система, у якої серед в'язей є нестационарні (реономні).

Нестаціонарна в'язь (реономна). Механічна в'язь, рівняння якої $f_l(t, r_i, \dot{r}_i) = 0$ містять час t явним чином.

Віртуальні переміщення точки. Нескінченно малі переміщення точок системи, що не суперечать її в'язям при фіксованому часі.

Можливі швидкості. Швидкості точок системи при русі, що не порушують накладені на систему механічні в'язі.

Можливі переміщення. Нескінченно малі переміщення точок системи, які можуть статися у часі, що не суперечать її в'язям.

Дійсні переміщення. Переміщення точок системи, які дійсно відбуваються у часі, з урахуванням діючих сил, накладених в'язей і початкових умов.

Гіроскопічна система. Механічна система, для якої виконуються такі умови: система задана стаціонарно, потенціальна енергія залежить лише від узагальнених координат, потужність непотенціальних сил дорівнює нулю.

Консервативна система. Механічна система, для якої виконуються такі умови: система задана стаціонарно, потенціальна енергія залежить лише від узагальнених координат, непотенціальні сили відсутні.

Положення рівноваги. Положення, при якому точки системи, розміщені у цьому положенні із нульовими швидкостями, продовжують у ньому ж залишатись.

5.2. Рівняння руху систем з одним ступенем вільності

У даному розділі розглянуто питання моделювання руху механічних систем з одним ступенем вільності. До дослідження руху такого класу систем часто зводять багато практичних завдань аналізу й синтезу машин і механізмів.

5.2.1. Рівняння в'язей та узагальнені координати. Розглянемо як об'єкт дослідження механічну систему, наведену на рисунку 5.1.

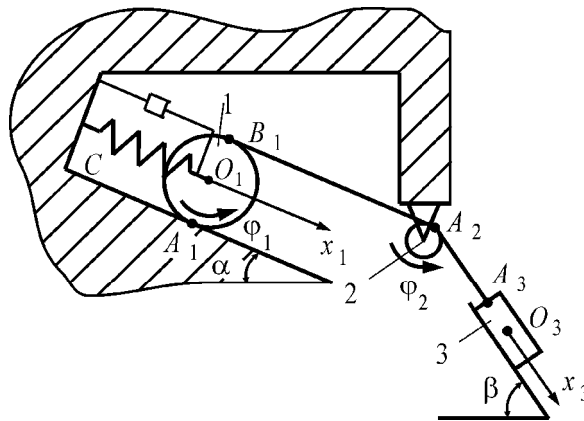


Рисунок 5.1 – Механічна система з одним ступенем вільності

При русі системи вантаж 3 вагою P_3 опускається уздовж нахиленої під кутом β площини, надаючи руху циліндру 1 вагою P_1 за допомогою жорсткого невагомго тросу, який перекинуто через блок 2. Циліндр, розкручуючи трос, рухається по нахиленій на кут α площині. Вісь циліндра з'єднана з нерухомою опорою пружиною, жорсткість якої c . Руху циліндра чинить опір в'язке середовище, що створює силу опору, пропорційну швидкості його поступального руху (швидкості руху центра ваги циліндра) $F_{\text{тр}} = -\mu_x \dot{x}_1$, і момент опору $M_{\text{тр}} = -\mu_\phi \dot{\phi}_1$, пропорційний швидкості його обертального руху. Нахилені площини є ідеально гладкими, радіуси циліндра та блоку r_1 і r_2 відповідно.

Для механічної системи (див. рис. 5.1) необхідно скласти рівняння руху в узагальнених координатах, скориставшись рівняннями Лагранжа 2-го роду; встановити закон руху циліндра 1 розв'язком отриманих рівнянь за початкових умов $x_3|_{t=0} = x_{30}$, $\dot{x}_3|_{t=0} = v_{30}$; виконати аналіз отриманого розв'язку.

Розглянемо хід розв'язку сформульованого завдання. Відповідно до опису системи в ній виділено три тіла, які роблять такі види рухів: циліндр 1 – плоскопаралельний, блок 2 – обертальний, вантаж 3 – поступальний. Тому узагальнені координати, що характеризують рух кожного з розглянутих тіл, будуть такими: x_1 , φ_1 – для 1-го тіла, φ_2 – для 2-го, x_3 – для 3-го. Цими координатами (їх позитивні напрямки показані на рисунку 5.1), представленими як функції часу, однозначно визначають положення будь-якої точки механічної системи. Разом з тим не всі з перерахованих координат є незалежними, тому що на елементи системи накладені в'язі. Виберемо узагальнені координати для всієї системи, установимо рівняння в'язей та конкретизуємо рівняння Лагранжа. Одержимо його аналітичний розв'язок та виконаємо аналіз руху елементів системи. Потім з використанням комп'ютерних технологій проведемо повне дослідження, що дозволить зіставити дані аналізу руху системи.

Розглянемо в'язі між координатами, що описують рух системи. Точка A_1 циліндра являє собою його МЦШ, тому що швидкість її дорівнює нулю (вона торкається грані нерухомої призми). З іншого боку, точка O_1 рухається прямолінійно напрямком x_1 , тому алгебраїчне значення її швидкості дорівнює \dot{x}_1 . Звідси швидкість точки A_1 можна обчислити відповідно до теореми про швидкість точки тіла при плоскопаралельному русі, як суму $v_{A_1} = \dot{x}_1 + r_1\dot{\varphi}_1$.

З огляду на те, що $v_{A_1} = 0$, одержимо зв'язок між координатами циліндра:

$$\dot{x}_1 = -r_1\dot{\varphi}_1. \quad (5.11)$$

Оскільки трос на ділянці торкання із циліндром 1 та блоком 2 нерозтяжний, швидкість точки B_1 буде дорівнювати швидкості точки A_2 : $v_{B_1} = v_{A_2}$; $v_{B_1} = 2r_1\dot{\varphi}_1$; $v_{A_2} = r_2\dot{\varphi}_2$, що дозволяє знайти зв'язок між координатами циліндра 1 та блока 2:

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{2r_1}{r_2}\dot{\varphi}_1. \quad (5.12)$$

Оскільки трос на ділянці торкання блоку 2 і вантажу 3 також нерозтяжний, швидкість точки A_2 буде дорівнювати швидкості точки A_3 : $v_{A_2} = v_{A_3}$; $v_{A_2} = r_2 \dot{\phi}_2$; $v_{A_3} = -\dot{x}_3$. Звідси одержимо зв'язок між координатами блоку 2 і вантажу 3:

$$\dot{\phi}_2 = -\frac{1}{r_2} \dot{x}_3. \quad (5.13)$$

Рівняння зв'язку (5.11)–(5.13) записано щодо швидкостей координат, але інтегрують їх з урахуванням початкових умов:

$$x_3 = -r_2 \phi_2; \quad \phi_2 = \frac{2r_1}{r_2} \phi_1; \quad x_1 = -r_1 \phi_1, \quad (5.14)$$

що свідчить про голономність розглянутої системи.

Число узагальнених координат, які визначають рух тіл механічної системи, дорівнює чотирьом (x_1, ϕ_1, ϕ_2, x_3), а число накладених на неї в'язей – трьом, тож можна зробити висновок про те, що незалежна координата в системі лише одна. Тому система має один ступінь вільності. Як незалежну узагальнену координату системи можна прийняти таку лінійну комбінацію координат системи:

$$q = x_1 - r_1 \phi_1. \quad (5.15)$$

Тоді, з огляду на умови (5.14), одержимо:

$$\phi_1 = -\frac{q}{2r_1}; \quad \phi_2 = -\frac{q}{r_2}; \quad x_1 = \frac{q}{2}; \quad x_3 = q. \quad (5.16)$$

Існують і інші можливості для вибору незалежної узагальненої координати. Наприклад, якщо $q = x_1$, то $\phi_1 = -\frac{q}{r_1}$; $\phi_2 = -\frac{2q}{r_2}$; $x_3 = 2q$.

5.2.2. Рівняння Лагранжа для систем з одним ступенем вільності. Відмітимо, що розглянута механічна система зі стаціонарними голономними в'язями, зовнішні сили якої є потенціальними (сили пружності пружини й сили ваги елементів), відноситься до дисипативних

систем, тому що циліндр 1 за умовою завдання рухається у в'язкому середовищі. Рівняння Лагранжа для дисипативної системи, що має один ступінь вільності, запишемо у вигляді

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}}, \quad (5.17)$$

де $L = T - \Pi$ (T – кінетична енергія, Π – потенціальна); R – функція Релея (функція дисипації або розсіювання). Функцію Релея обчислюють як половину потужності сил розсіювання: $R = -\frac{1}{2}W$. Потужність сил тертя для циліндра 1 можна підрахувати так: $W = \vec{F}_{\text{тр}} \cdot \vec{v}_1 + \vec{M}_{\text{тр}} \cdot \vec{\omega}_1$, що з урахуванням напрямів векторів перетворюється на $W = -F_{\text{тр}} \cdot \dot{x}_1 - M_{\text{тр}} \cdot \dot{\phi}_1$.

Скористаємося зв'язком модулів сили й моменту тертя в'язкого середовища з відповідними швидкостями: $F_{\text{тр}} = \mu_x \dot{x}_1$, $M_{\text{тр}} = \mu_\phi \dot{\phi}_1$, що дозволить записати: $R = \frac{1}{2}(\mu_x \dot{x}_1^2 + \mu_\phi \dot{\phi}_1^2) \geq 0$, $\mu_x, \mu_\phi \geq 0$.

Приймемо за незалежну узагальнену координату величину q (5.15), тоді з огляду на відношення (5.16), одержимо:

$$R = \frac{1}{2} \mu \dot{q}^2, \quad (5.18)$$

де $\mu = \frac{1}{4} \left(\mu_x + \frac{\mu_\phi}{r_1^2} \right)$ – узагальнений коефіцієнт в'язкого тертя. Кінетичну енергію розглянутої системи обчислимо як суму кінетичних енергій її елементів. Для циліндра 1, який рухається плоскопаралельно, це $T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\phi}_1^2$, де m_1 – маса циліндра; J_1 – осьовий момент інерції циліндра, які можна визначити за формулами $m_1 = \frac{P_1}{g}$; $J_1 = \frac{m_1 r_1^2}{2} = \frac{P_1 r_1^2}{2g}$.

Перепишемо отриманий вираз для кінетичної енергії циліндра 1, використовуючи прийняту рівність (5.15) визначення узагальненої координати q :

$$T_1 = \frac{3}{16} \frac{P_1}{g} \dot{q}^2.$$

Блок 2 рухається обертально, і отже, його кінетичну енергію запишемо у вигляді

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2 \dot{\phi}_2^2 = \frac{1}{4} \frac{P_2}{g} r_2^2 \dot{\phi}_2^2 = \frac{1}{4} \frac{P_2}{g} \dot{q}^2.$$

Вантаж 3 рухається поступово прямолінійно, його кінетична енергія:

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2 = \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} \dot{x}_3^2 = \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} \dot{q}^2.$$

Кінетичну енергію всієї розглянутої системи остаточно обчислимо за формулою

$$T = \frac{3P_1 + 4P_2 + 8P_3}{16g} \dot{q}^2. \quad (5.19)$$

Потенціальна енергія системи включає енергію пружини, а також потенціал сил ваги циліндра 1 і вантажу 3, що змінюють своє положення при русі. Для обчислення цієї складової потенціальної енергії системи вважаємо, що в початковому положенні пружина перебуває в розтягнутому стані під дією сили натягу, створеної складовими сил ваги циліндра 1 і вантажу 3, а система в цілому – у стійкому статично зрівноваженому стані. Рух циліндра 1 відраховуємо від положення статичного подовження пружини $\delta_{\text{ст}}$. Тому потенціальну енергію пружини обчислимо:

$$\Pi_c = - \int_{\delta+x_1}^{\delta} c x dx = \frac{c}{2} [(x_1 + \delta_{\text{ст}})^2 - \delta_{\text{ст}}^2] = \frac{c}{2} x_1^2 + c \delta_{\text{ст}} x_1,$$

а при урахуванні зв'язку x_1 з незалежною узагальненою координатою q запишемо таким чином: $\Pi_c = \frac{c}{8}q^2 + \frac{c}{2}\delta_{\text{ст}}q$. Потенціал сил ваги визначимо як роботу цих сил, необхідну для підйому циліндра 1 і вантажу 3 на величину їхнього опускання: $\Pi_{13} = -P_1x_1 \sin \alpha - P_3x_3 \sin \beta$, а при урахуванні зв'язку між x_1 і x_3 з узагальненою координатою q обчислимо так:

$$\Pi_{13} = -\left(\frac{P_1}{2}\sin \alpha + P_3 \sin \beta\right)q.$$

Приймаючи потенціальну енергію системи у вигляді суми потенціальної енергії пружини, а також потенціалу сил ваги циліндра 1 і вантажу 3, одержимо:

$$\Pi = \frac{c}{8}q^2 + \left(\frac{c\delta_{\text{ст}}}{2} - \frac{P_1}{2}\sin \alpha - P_3 \sin \beta\right)q.$$

Величину $\delta_{\text{ст}}$ визначимо з умови, що в статичній рівновазі системи її потенціальна енергія мінімальна, тобто $\left.\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right|_{q=0} = 0$, звідки

$$\frac{c\delta_{\text{ст}}}{2} = \frac{P_1}{2}\sin \alpha + P_3 \sin \beta. \text{ З урахуванням останньої рівності одержимо:}$$

$$\Pi = \frac{c}{8}q^2. \quad (5.20)$$

Функцію Лагранжа для розглянутої системи запишемо з урахуванням формул (5.19) і (5.20) у вигляді:

$$L = T - \Pi = \frac{3P_1 + 4P_2 + 8P_3}{16g}\dot{q}^2 - \frac{c}{8}q^2. \quad (5.21)$$

Далі перепишемо рівняння Лагранжа (5.17) з огляду на формули (5.18) і (5.21):

$$M\ddot{q} + \mu\dot{q} + Cq = 0, \quad (5.22)$$

$$\text{де } M = \frac{3P_1 + 4P_2 + 8P_3}{8g}; \quad \mu = \frac{1}{4} \left(\mu_x + \frac{\mu_\phi}{r_1^2} \right); \quad C = \frac{c}{4}.$$

Рівняння (5.22) розглядаємо як рівняння руху системи в узагальнених координатах. Із його вигляду можна зробити висновок про те, що рух досліджуваної системи в узагальнених координатах еквівалентний руху точки масою M , на яку діє поновлююча сила (сила пружності із коефіцієнтом жорсткості C) та сила опору в'язкого середовища з коефіцієнтом в'язкості μ .

5.2.3. Розв'язок рівняння Лагранжа і його аналіз. Скористаємося чисельними даними параметрів розглянутої механічної системи, наведеними в табл. 5.1.

Таблиця 5.1 – Параметри системи

Елементи системи	P , кН	r , м	c , Н/м	μ_x , Н·с/м	μ_ϕ , Н·с·м
Циліндр 1	0,2	0,8	—	—	—
Блок 2	0,1	0,2	4000	75	48
Вантаж 3	0,5	—	—	—	—

Обчислимо такі величини:

$$\mu = \frac{1}{4} \left(\mu_x + \frac{\mu_\phi}{r_1^2} \right) = \frac{1}{4} \left(75 + \frac{48}{0,64} \right) = 37,5 \text{ Н} \cdot \text{с/м};$$

$$M = \frac{3P_1 + 4P_2 + 8P_3}{8g} = 100 \frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 8 \cdot 5}{8 \cdot 9,81} \cong 63,71 \text{ Н} \cdot \text{с}^2 / \text{м};$$

$$h = \frac{\mu}{2M} = \frac{37,5}{2 \cdot 63,71} \cong 0,2943 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega^2 = \frac{C}{M} = \frac{4000}{4 \cdot 63,71} \cong 15,696 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{M}} \cong 3,962 \text{ с}^{-1}.$$

З отриманих значень видно, що для розглянутої системи умова затухаючих коливань $h < \omega$ (h – коефіцієнт затухання; ω – власна частота) виконується, тобто узагальнена координата q змінюється за законом:

$$q(t) = ae^{-ht} \sin(\omega_* t + \gamma), \quad (5.23)$$

де ae^{-ht} та γ – амплітуда та фаза затухаючих коливань відповідно, які залежать від початкових умов $q|_{t=0} = q_0, \dot{q}|_{t=0} = \dot{q}_0$ (q_0, \dot{q}_0 – задані величини, що обчислюють за початковим значенням відхилення й швидкості координати системи). Наприклад, якщо прийняти початкові значення відхилення й швидкість вантажу 3 у вигляді $x_3|_{t=0} = x_{30}, \dot{x}_3|_{t=0} = v_{30}$, то одержимо $q_0 = x_{30}, \dot{q}_0 = \dot{x}_{30}$. За початковим значенням узагальненої координати неважко знайти величини:

$$a^2 = q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0 + hq_0}{\omega_*} \right)^2; \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{q_0 \omega_*}{\dot{q}_0 + hq_0}; \quad \omega_*^2 = \omega^2 - h^2; \quad \omega^2 = \frac{C}{M}. \quad (5.24)$$

У випадку затухаючих коливань (5.23) закон руху циліндра 1 має вигляд

$$x_1(t) = \frac{1}{2} ae^{-ht} \sin(\omega_* t + \gamma); \quad \varphi_1(t) = -\frac{a}{2r_1} e^{-ht} \sin(\omega_* t + \gamma). \quad (5.25)$$

Аналогічно, скориставшись рівностями (5.16) і (5.23), можна встановити закони руху блока 2 і вантажу 3.

Кругову частоту затухаючих коливань обчислимо так: $\omega_* = \sqrt{\omega^2 - h^2} = \sqrt{15,696 - 0,0866} \cong 3,951 \text{ с}^{-1}$. Умовним періодом затухаючих коливань буде значення $T = \frac{2\pi}{\omega_*} = \frac{2\pi}{3,951} \cong 1,59 \text{ с}$.

Вантаж 3 – тіло, для якого задані початкові умови: $x_{30} = 0,02 \text{ м}, \dot{x}_{30} = 0$ – координата центра ваги і його швидкість відповідно. Перерахуємо задані умови в узагальнених координатах:

$$q_0 = x_{30} = 0,02 \text{ м}; \quad \dot{q}_0 = \dot{x}_{30};$$

$$a = q_0 \sqrt{1 + \left(\frac{h}{\omega_*}\right)^2} = 0,02 \sqrt{1 + \left(\frac{0,2943}{3,951}\right)^2} \cong 0,0201 \text{ м};$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\omega_*}{h} = \frac{3,951}{0,2943} \cong 13,425; \quad \sin \gamma = \frac{q_0}{a} = \frac{0,02}{0,0201} \cong 0,997.$$

Кут γ перебуває в 1-й чверті й дорівнює $0,476\pi$ рад.

Тепер визначимо закон затухаючих коливань циліндра 1, що буде мати вигляд:

$$x_1(t) = 0,01 \cdot e^{-0,2943t} \sin(3,951t + 0,476\pi) \text{ м};$$

$$\varphi_1(t) = -0,0125 e^{-0,2943t} \sin(3,951t + 0,476\pi) \text{ рад}.$$

Аналіз отриманого розв'язку дозволяє встановити, що максимальні значення відхилення осі циліндра 1 і його кута повороту мають місце в початковий момент часу:

$$x_{1\max} = 0,01 \sin(0,476\pi) = 0,01 \text{ м};$$

$$\varphi_{1\max} = -0,0125 \sin(0,476\pi) \cong -0,0125 \text{ рад}.$$

Обчислимо для циліндра 1 логарифмічний декремент коливань, який характеризує зменшення амплітуд коливань за період

$$\eta = hT = 0,2943 \cdot 1,59 \cong 0,468.$$

Відмітимо, що амплітуди коливань вантажу 3 виявляються у два рази більшими, ніж амплітуди коливань центра циліндра 1. Внаслідок того, що всі координати системи відповідно до виразів (5.16) пропорційні незалежній узагальненій координаті q , а остання змінюється в часі за законом затухаючих коливань (5.23), то й всі елементи системи будуть створювати затухаючі коливання.

5.2.4. Використання інформаційних технологій для систем з одним ступенем вільності. У підрозділах 5.2.2 і 5.2.3 було складено та аналітично розв'язано рівняння руху системи з одним ступенем вільності. У сучасних умовах фахівцеві необхідно вміти використовувати ін-

формаційні технології. Розглянемо схему розв'язку даної задачі засобами ПК КіДиМ, для чого створимо файл вихідної інформації.

Текст файлу

```
РАБОТА := № 5. Дослідження динаміки МС;
ВЫПОЛНИЛ:= ст. Іванов П.С., гр. І-17а;

# x1,fi1,fi2,x3 - координати тіл
# узагальнена координата - q #

# Формулювання диференціальних рівнянь руху #
# Інерційні характеристики тіл системи: #
J.x1 = m1; J.fi1 = J1; J.fi2 = J2; J.x3 = m3;
# Пружний елемент # C.x1 = c;
# Дисипативні елементи # D.x1 = mux1; D.fi1 = mufi1;
# В'язі між координатами системи #
x1 = q/2; fi1 = - q/(2*r1); fi2 = - q/r2; x3 = q;
x30 = 0.02; v30 = 0; q0 = x30; v0=v30;

# Вихідні дані та необхідні обчислення #
P1=200; P2=100; P3=500; r1 = 0.8; r2 = 0.2; c = 4000;
mux1 = 75; mufi1 = 48;
alfa = PI/6; betta = PI/3;
m1 = P1/g; m2 = P2/g; m3 = P3/g;
J1 = m1*r1*r1/2; J2 = m2*r2*r2/2;

# Порівняння аналітичних розв'язків з чисельними #
# Еквівалентні параметри коливань #
M=3*m1/8+m2/2+m3; C = c/4; mu=(mux1+mufi1/(r1^2))/4;
h = mu/2/M; omega = sqrt(C/M); omega1 = sqrt(omega^2-h^2);
T = 2*pi/omega1; delta=(P1*sin(alfa)+2*P3*sin(betta))/c;
# Кинетична, потенціальна та повна енергія #
Tq = M*q't^2/2;
Ts = 0.5*(m1*x1't^2+J1*fi1't^2+J2*fi2't^2+m3*x3't^2);
Пq = C*q^2/2;
Пs = 0.5*c*x1^2+c*delta*x1-P1*x1*sin(alfa)-
P3*x3*sin(betta);
Eq = Tq + Пq;
Tq0 = M*v0^2/2; Пq0 = C*q0^2/2; Eq0 = Tq0 + Пq0;
#Похідні від кінетичної, потенціальної та повної енергій#
dTq = M*q't*q't't; dПq = C*q*q't; dEq = dTq+dПq;
```

```

#Функція Релея#
Rq = mu*q't^2/2;
Rs = 0.5*(mux1*x1't^2+mufil*fil't^2);
DR = -2*Rq;

#Інструкції для розрахунків та представлення результатів#
НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ:= t(0), q(q0), q't(v0);
КОНЕЧНЫЕ УСЛОВИЯ:= t(15);
ПЕЧАТАТЬ:=q,x1,fil,fi2,x3,h,M,C,omega, omega1,T;
СРАВНИТЬ:= координати(q,x1,x3), кути(fil,fi2),
кінет_ен(Tq,Ts,Tq0), пот_ен(Пq,Ps,Пq0), t(Rq,Rs),
діф.форма.теор_повн_ен(dEq,DR),
повна енергія(Eq0,Eq,Tq,Пq);
РАСЧЕТ:=ПЕЧАТЬ УРАВНЕНИЙ;
КОНЕЦ;

```

У файлі вихідних даних прийняті такі позначення: **x1, fi1, fi2, x3** – координати тіл системи; **q** – узагальнена координата, яка зв'язана із координатами тіл за допомогою формул (5.16); **m1, m2, m3** – маси елементів системи; **P1, P2, P3** – ваги елементів системи; **J1, J2** – моменти інерції тіл, які здійснюють плоско-паралельний та обертальний рухи; **r1, r2** – радіуси відповідних елементів системи; **c** – коефіцієнт жорсткості пружини; **mux1, mufil** – коефіцієнти опору в'язкого середовища, у якому рухається тіло 1; **c** – коефіцієнт жорсткості пружини; **alfa, betta** – кути нахилу відповідних площин (можуть набувати будь-яких значень); **x30, v30** – початкові зміщення та швидкість тіла 3; **q0, v0** – початкові значення узагальненої координати та узагальненої швидкості; **M** – еквівалентна маса системи; **C** – еквівалентний коефіцієнт жорсткості; **mu** – еквівалентний коефіцієнт в'язкості; **omega, h, omega1, T** – власна частота, коефіцієнт затухання, частота затухаючих коливань та умовний період затухаючих коливань; **delta** – статичне подовження пружини; **Tq, Пq, Eq** – кінетична, потенціальна та повна механічна енергії системи як функції узагальненої швидкості \dot{q} та узагальненої координати q (згідно з формулами (5.19) та (5.20)); **Ts** – кінетична енергія системи як функція похідних від координат тіл системи:

$T_s = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + J_1\dot{\phi}_1^2 + J_2\dot{\phi}_2^2 + m_3\dot{x}_3^2)$; Π_s – потенціальна енергія системи

як функція координат тіл системи: $\Pi_s = \frac{c}{2}x_1^2 + c\delta_{ct}x_1 - P_1x_1\sin\alpha - P_3x_3\sin\beta$; $dT_{\mathbf{q}}$ – похідна від кінетичної енергії як функція узагальненої швидкості: $\frac{\partial T}{\partial t} = M\dot{q}\ddot{q}$; $d\Pi_{\mathbf{q}}$ – похідна за часом від потенціальної

енергії як функція узагальненої координати: $\frac{\partial \Pi}{\partial t} = Cq\dot{q}$; $dE_{\mathbf{q}}$ – похідна

за часом від повної механічної енергії: $\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial t}$; $T_{\mathbf{q}0}, \Pi_{\mathbf{q}0}, E_{\mathbf{q}0}$ –

початкові значення кінетичної, потенціальної та повної механічної енергії, які визначаються початковими значеннями узагальненої координати та швидкості; $R_{\mathbf{q}}, R_s$ – функція Релея від узагальненої швидкості \dot{q} (згідно з формулою (5.18)) та від координат тіла 1, яке рухається у в'язкому середовищі; DR – функція, яка визначає праву частину формули (5.7). У наведеному файлі вихідних даних розв'язок проводиться відносно узагальненої координати q , для якої формулюються відповідні початкові умови, також тут використовуються конструкції типу «пружний елемент» та «дисипативний елемент» (дивись розділ 1), за допомогою яких ПК КіДиМ автоматично формулює відповідні узагальнені сили.

Результатом роботи ПК КіДиМ є різноманітна числова та графічна інформація. За допомогою спільного розгляду графіків (див. інструкцію **СРАВНИТЬ**) різних видів енергій ми не лише можемо перевірити вірогідність одержаних у підрозділі 5.3 аналітичних розв'язків, а й встановити та дослідити закономірності змін кінетичної, потенціальної та повної механічної енергії при русі механічної системи. Далі наведено деякі результати розв'язку, а саме: графіки зміни у часі узагальненої координати системи з одним ступенем вільності (рис. 5.2.), лінійного відхилення осі циліндра 1 (рис. 5.3) і кута повороту циліндра 1 (рис. 5.4). Графіки представлено у форматі постпроцесору ПК КіДиМ.

Крім наведених результатів, дослідник може використати ПК КіДиМ для перевірки попередніх аналітичних обчислень узагальнених

параметрів системи (коефіцієнта затухання, узагальненої маси, узагальненого коефіцієнта жорсткості, власної частоти, кругової частоти затухаючих коливань, умовного періоду). Засоби ПК КіДиМ також дозволяють наочно порівняти закони змін у часі координат тіл системи та інші величини, якщо побудувати відповідні графіки у однаковому масштабі (див. інструкцію **СПРАВНИТЬ**).

Аналіз поданих графіків дозволяє зробити наступні висновки, що підтверджують результати, отримані в підрозділі 5.3. Узагальнена координата q системи з одним ступенем вільності змінюється за законом затухаючих коливань, що відповідає формулі (5.13). Лінійні відхилення осі й кути повороту циліндра 1 також змінюються за законом затухаючих коливань, що теж відповідає висновкам підрозділу 5.3.

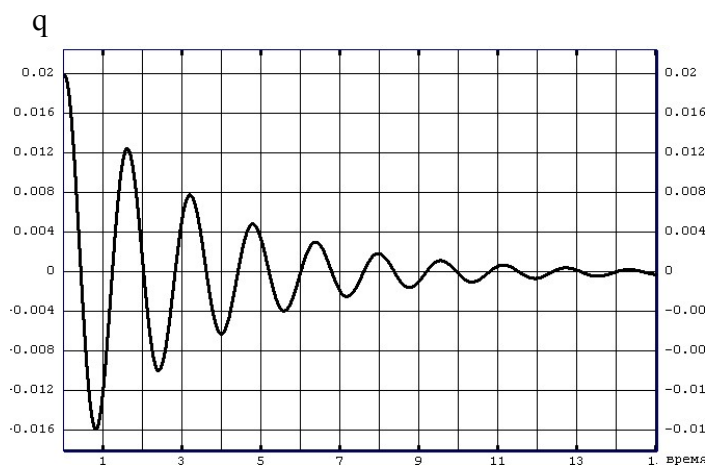


Рисунок 5.2 – Закон зміни узагальненої координати

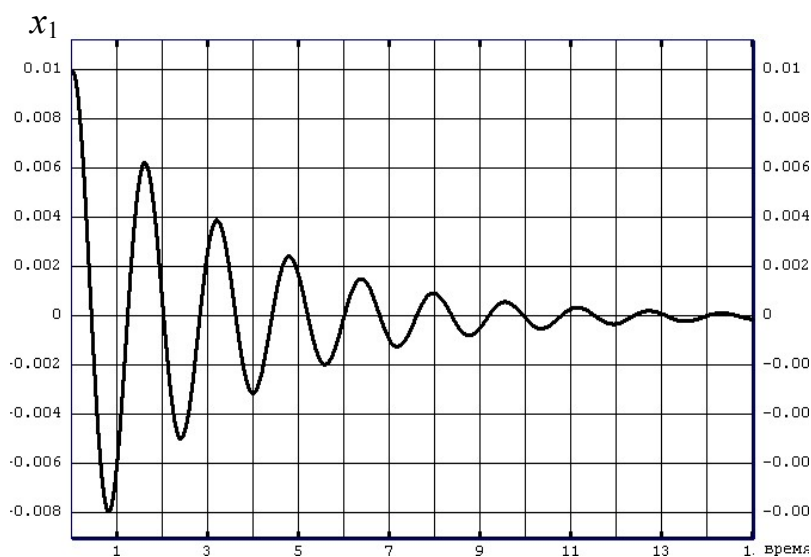


Рисунок 5.3 – Закон відхилення осі циліндра

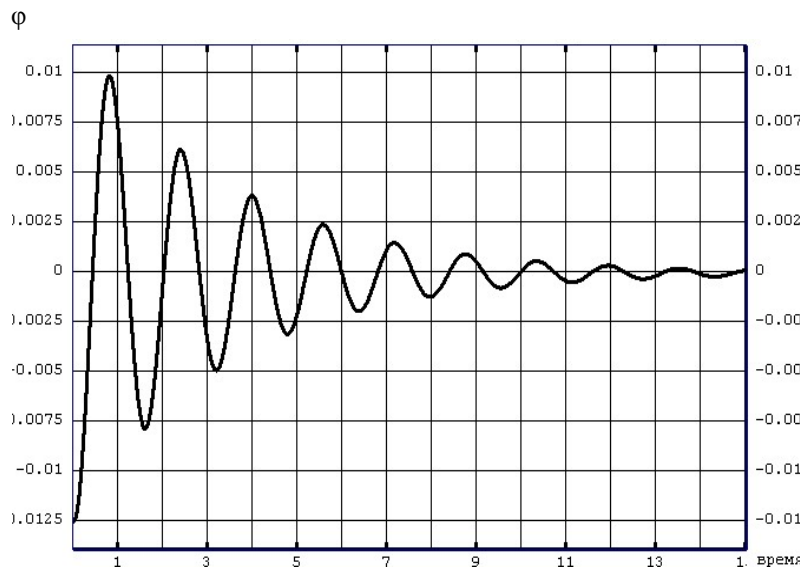
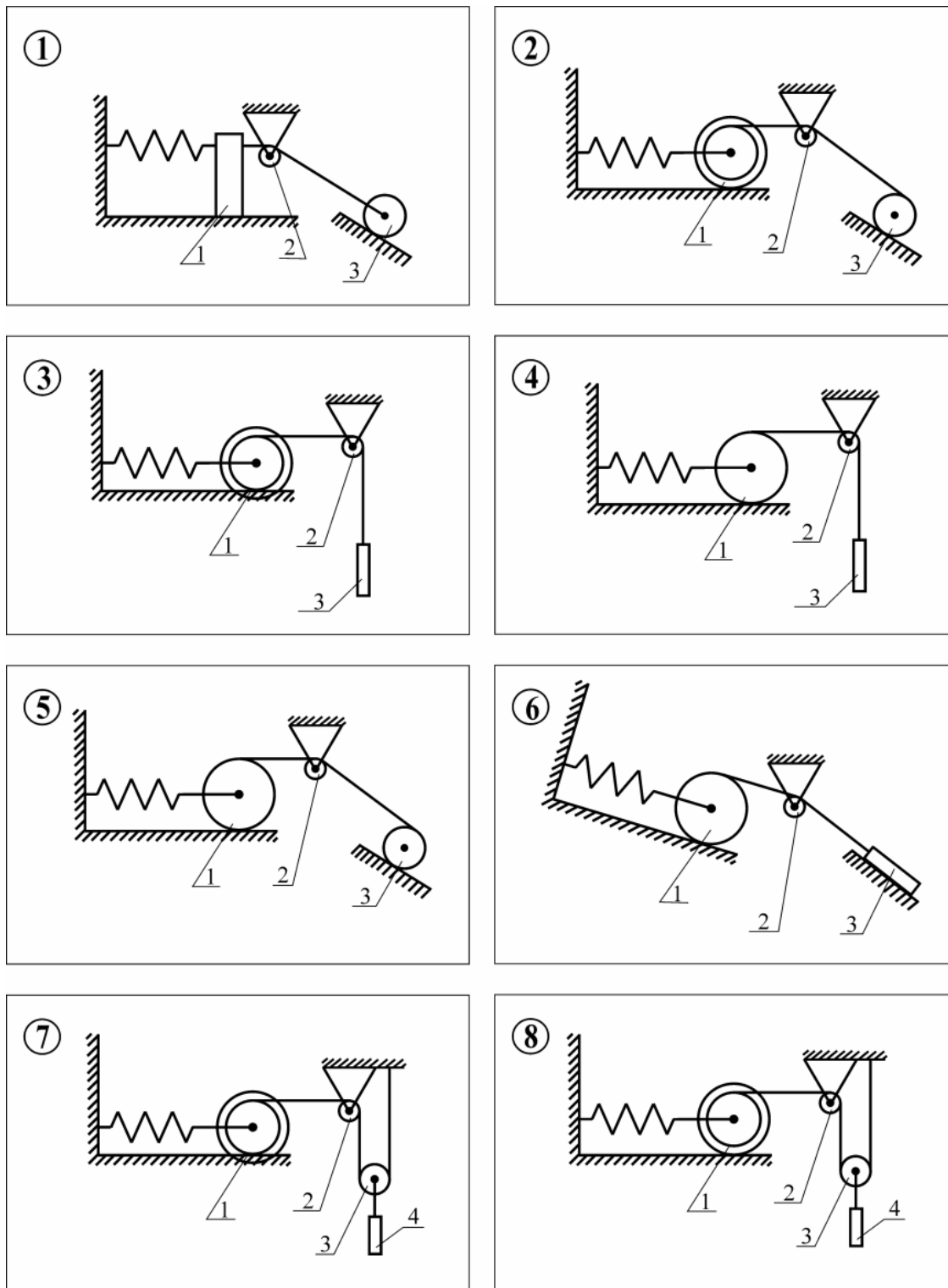


Рисунок 5.4 – Закон зміни кута повороту циліндра

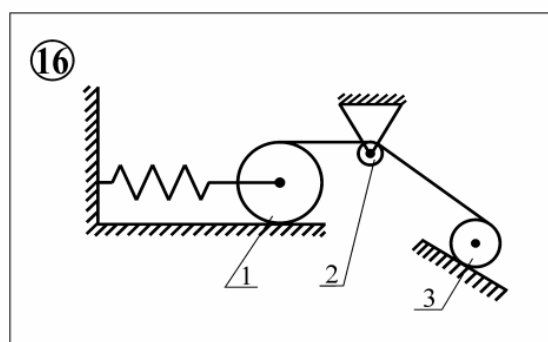
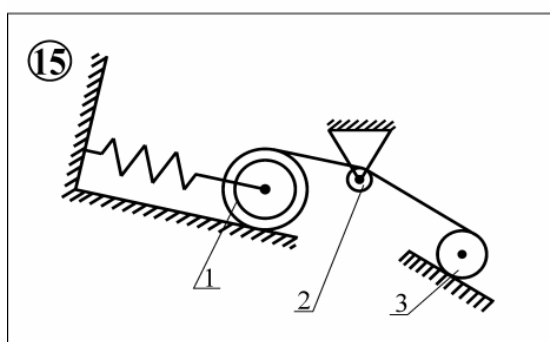
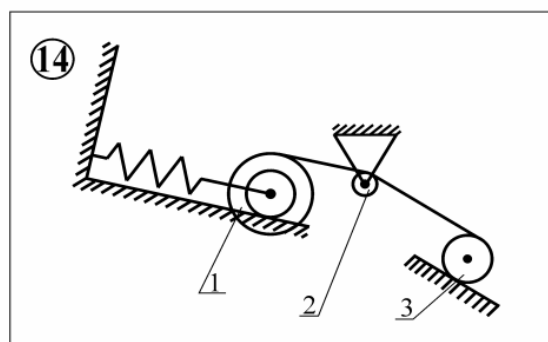
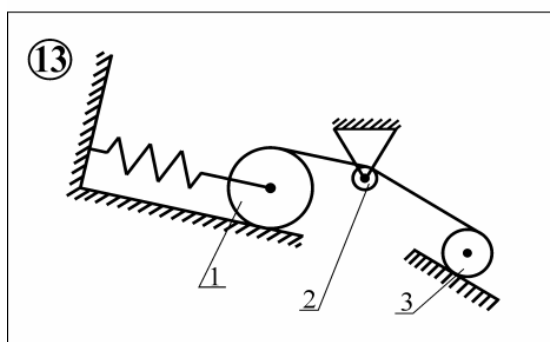
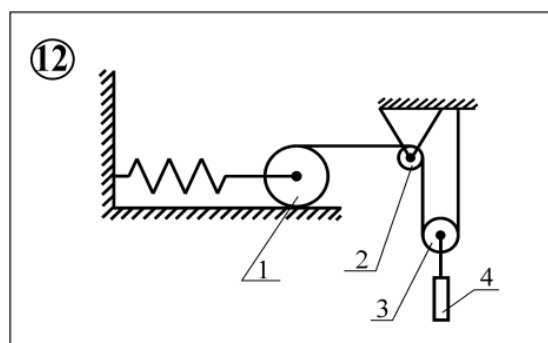
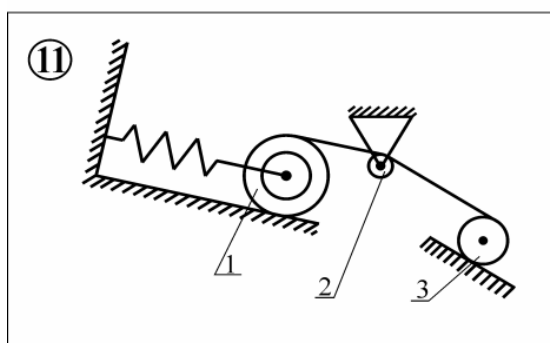
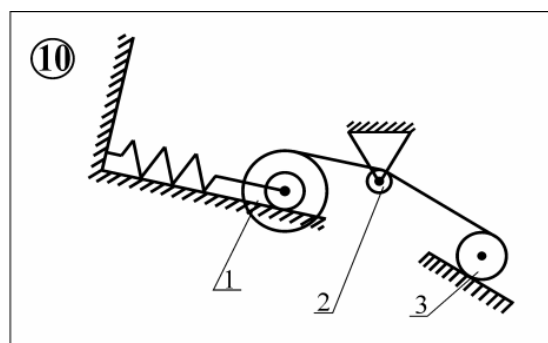
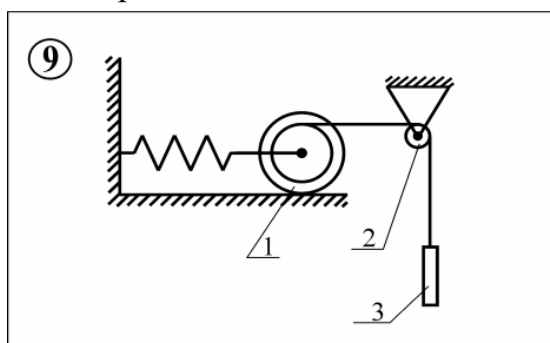
5.2.5. Завдання для самостійної роботи. Варіанти завдань подано в таблиці 5.2 схемами механічних систем з одним ступенем вільності. У таблиці 5.3 наведено вихідні дані, а в таблиці 5.4 – початкові умови руху, де вказано номер елемента механічної системи, для якого необхідно визначити закон руху.

Необхідно встановити в'язі між координатами тіл системи, вибрати узагальнену координату, сформулювати кінетичну, потенціальну енергію, функцію Релея. Далі, використовуючи рівняння Лагранжу 2-го роду для механічної системи, необхідно скласти рівняння руху в узагальнених координатах, встановити закон руху зазначеного елемента системи при заданих початкових умовах (див. табл. 5.5), а потім, використовуючи файл вихідних даних ПК КіДиМ, поданий у підрозділі 5.2.4., виконати повне дослідження руху системи.

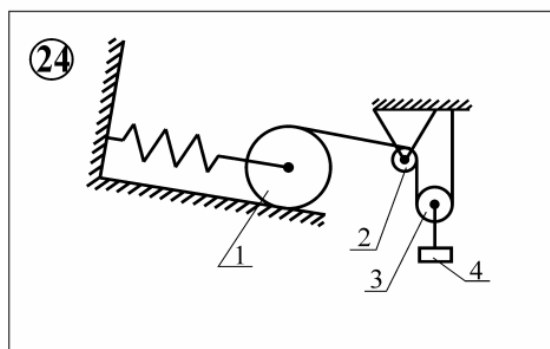
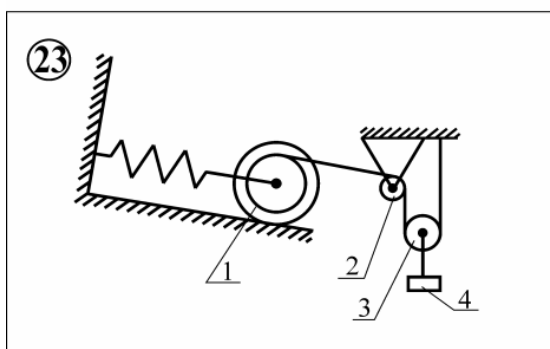
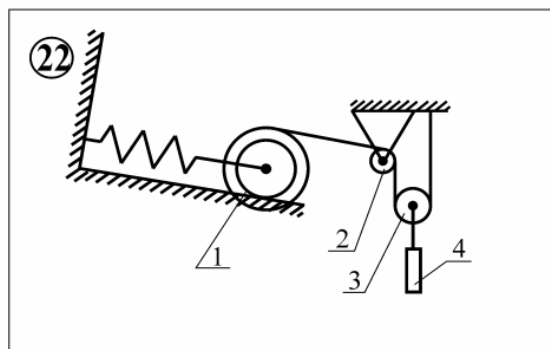
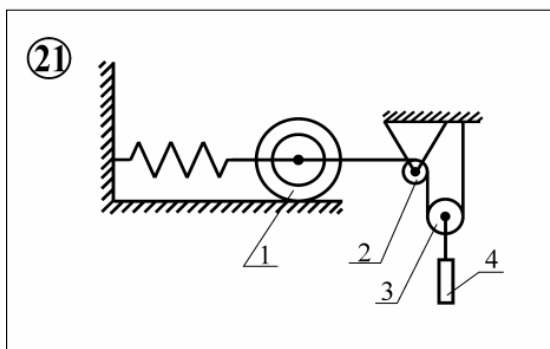
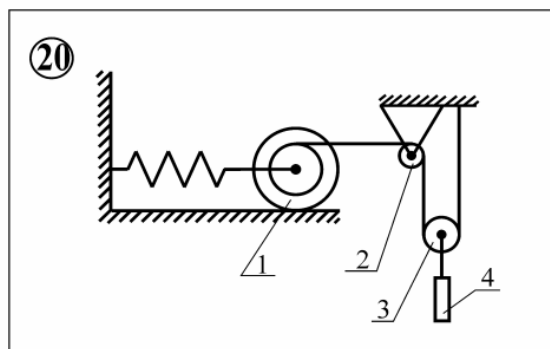
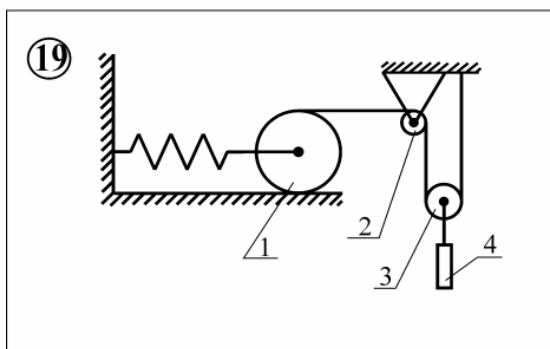
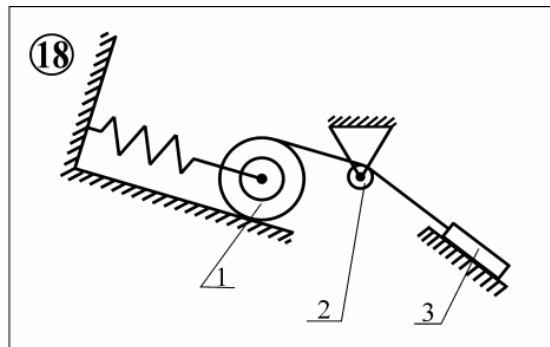
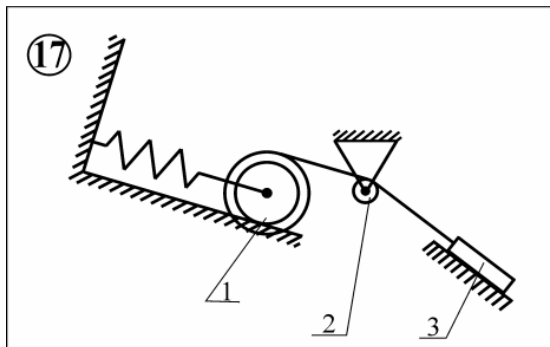
Таблиця 5.2 – Варіанти завдань для аналізу руху механічних систем з одним ступенем вільності із застосуванням рівнянь Лагранжа 2-го роду



Продовження табл. 5.2



Продовження табл. 5.2



Таблиця 5.3 – Вихідні дані

Номер варіанта	Параметри механічної системи						
	m_1 , кг	m_2 , кг	m_3 , кг	m_4 , кг	r_0 , м	r_1 , м	ρ_z , м
1	6	0.2	2	—	—	—	—
2	3	0.5	2 ¹	—	0.1	0.2	0.15
3	4	1	3	—	0.1	0.2	0.15
4	3	1.5	4	—	—	0.3	—
5	4	1	3 ¹	—	—	0.25	—
6	2	1	2	—	—	0.3	—
7	5	1	1	2	0.2	0.25	0.25
8	5	1.5	2	4	0.25	0.3	0.4
9	3	0.5	5	—	0.2	0.3	0.4
10	4	0.5	1	—	0.15	0.2	0.3
11	2	1	1.5 ¹	—	0.2	0.3	0.35
12	3	1.5	1.5	4	—	0.2	—
13	4	1	3	—	—	0.2	—
14	2	1	3 ¹	—	0.1	0.3	0.25
15	4	1	4	—	0.1	0.4	0.3
16	3	0.5	2	—	—	0.3	—
17	2	0.5	3	—	0.15	0.3	0.3
18	5	1.5	4	—	0.2	0.4	0.5
19	4	0.5	0.5	3	—	0.2	—
20	5	1	1	4	0.3	0.4	0.4
21	3	0.5	0.5	2	0.1	0.3	0.2
22	4	0.5	1	3	0.1	0.25	0.3
23	2	0.5	1.5	5	0.2	0.4	0.4
24	3	0.1	2	3	—	0.25	—

¹ Тіло у вигляді тонкого кільця

Продовження табл. 5.3

Номер варіанта	Параметри механічної системи						
	r_2 , м	r_3 , м	α , °	β , °	μ_x , Н·с/м	μ_φ , Н·с·м	c , Н/м
1	0.1	0.4	—	30	160	10^2	1500
2	0.1	0.2	—	60	120	15	2000
3	0.05	—	—	—	750	500	1500
4	0.05	—	—	—	600	250	1000
5	0.1	0.25	—	25	600	710	3000
6	0.05	—	30	60	150	110	2500
7	0.1	0.1	—	—	600	180	1500
8	0.1	0.15	—	—	150	100	2500
9	0.15	—	—	—	200	140	2000
10	0.05	0.15	25	60	400	200	2500
11	0.1	0.2	30	60	170	100	2000
12	0.05	0.1	—	—	110	50	1500
13	0.1	0.3	20	45	100	0	3000
14	0.05	0.3	14	55	140	10	2000
15	0.15	0.2	10	45	180	4	4000
16	0.1	0.3	—	50	120	50	3500
17	0.05	—	15	40	70	10	2000
18	0.15	—	25	55	160	8	4000
19	0.05	0.05	—	—	180	2	1500
20	0.1	0.1	—	—	100	0	3000
21	0.05	0.05	—	—	200	1	2000
22	0.05	0.1	45	—	140	8	2500
23	0.05	0.15	55	—	150	7	3500
24	0.1	0.15	30	—	170	4	2500

² Момент сил опору прикладений до тіла 2

Для наведених параметрів треба зробити деякі пояснення: m_1, m_2, m_3, m_4 – маси тіл 1–4; r_0, r_1 – радіуси внутрішнього та зовнішнього шківів тіла 1; ρ_z – його радіус інерції; r_2, r_3 – радіуси тіл 2 та 3; c – коефіцієнт жорсткості пружини; μ_x – коефіцієнт, який пов’язує силу опору в’язкого середовища зі швидкістю центра мас тіла 1; μ_ϕ – коефіцієнт, який пов’язує момент сил опору в’язкого середовища із кутовою швидкістю тіла 1 (або тіла 2 залежно від розрахункової схеми); α – кут нахилу площини, по якій рухається тіло 1; β – кут нахилу площини, по якій рухається тіло 3.

Таблиця 5.4 – Початкові умови

Номер варіанта	Тіло, для якого задається початкова умова	Величина, яка задається, розмірність ³	Значення	Визначити закон руху для тіла
1	1	Координата ЦВ, м	0.01	3
	2	Кутова швидкість, c^{-1}	0.2	
2	1	Координата ЦВ, м	0	1
	3	Кутова швидкість, c^{-1}	10	
3	2	Кут повороту, рад	0	1
	3	Швидкість ЦВ, м/с	1.2	
4	2	Кут повороту, рад	0.1	1
	1	Кутова швидкість, c^{-1}	0	
5	3	Кут повороту, рад	0.2	1
	1	Швидкість ЦВ, м/с	0	
6	3	Координата ЦВ, м	0.02	1
	2	Кутова швидкість, c^{-1}	0.3	
7	1	Кут повороту, рад	0.15	1
	3	Швидкість ЦВ, м/с	0.4	
8	3	Кут повороту, рад	0.5	1
	2	Кутова швидкість, c^{-1}	0.25	
9	1	Координата ЦВ, м	0.03	1
	1	Кутова швидкість, c^{-1}	1.2	
10	1	Кут повороту, рад	1.5	1
	2	Кутова швидкість, c^{-1}	0.6	

³ Координата та швидкість ЦВ (центру ваги) відраховуються від положення стійкої рівноваги: позитивний напрям – у бік, який відповідає розтягненню пружини

Продовження табл. 5.4

Номер варіанта	Тіло, для якого задається початкова умова	Величина, яка задається, розмірність	Значення	Визначити закон руху для тіла
11	3	Кут повороту, рад	2	1
	1	Швидкість ЦВ, м/с	1.4	
12	4	Координата ЦВ, м	0	3
	1	Кутова швидкість, с^{-1}	2.5	
13	1	Координата ЦВ, м	0.05	1
	2	Кутова швидкість, с^{-1}	4.2	
14	2	Кут повороту, рад	0.5	1
	1	Кутова швидкість, с^{-1}	0	
15	2	Кут повороту, рад	3	1
	1	Швидкість ЦВ, м/с	1.6	
16	3	Координата ЦВ, м	0.01	1
	1	Кутова швидкість, с^{-1}	3.2	
17	2	Кут повороту, рад	2.1	1
	1	Кутова швидкість, с^{-1}	1.5	
18	3	Координата ЦВ, м	0	1
	1	Кутова швидкість, с^{-1}	5.1	
19	3	Координата ЦВ, м	0.01	1
	2	Кутова швидкість, с^{-1}	4.7	
20	4	Координата ЦВ, м	0	3
	2	Кутова швидкість, с^{-1}	3.5	
21	3	Координата ЦВ, м	0.025	3
	2	Кутова швидкість, с^{-1}	4.1	
22	4	Координата ЦВ, м	0.03	1
	1	Кутова швидкість, с^{-1}	2.5	
23	1	Координата ЦВ, м	0.01	3
	1	Кутова швидкість, с^{-1}	6.2	
24	2	Координата ЦВ, м	2.3	3
	1	Кутова швидкість, с^{-1}	5.4	

Питання для самоконтролю

1. Що містять в собі поняття: механічна система, замкнена система?
2. Як визначають поняття механічної в'язі, механічної утримуючої та не утримуючої в'язей?
3. Що називають геометричною (голономною, скінченою, інтегрованою диференціальною), кінематичною та неголономною в'яззю?
4. У чому полягає різниця поміж ідеальною та неідеальною в'яззю?
5. Що означають терміни: нестационарні (реонормні), утримуючи та неутримуючи в'язі?
6. Визначте поняття: віртуальне, можливе та дійсне переміщення точки?
7. Що означає термін – можливі швидкості точок системи при русі?
8. Що міститься у поняттях: гіроскопічна та консервативна системи?
9. Яким чином встановлюється положення рівноваги механічної системи?
10. Як формулюється принцип віртуальних переміщень?
11. Яким чином визначають дисипативну функцію Релея, а із її допомогою дисипативні сили опору середовища?
12. У чому полягає фізичний зміст функції Релея?
13. Що являє собою потужність втрат механічної енергії завдяки наявності сил в'язкого опору?
14. Як записати рівняння Лагранжу у незалежних узагальнених координатах для склерономних голономних систем при дії потенціальних та дисипативних сил?
15. Який порядок має система рівнянь Лагранжу 2-го роду?
16. Чи можуть бути нелінійними рівняння Лагранжу 2-го роду?
17. Як записати умови для малих рухів механічних систем в околі положення стійкої рівноваги?
18. Як формулюється теорема Лагранжу-Дирихле?
19. Чим визначають поняття нестійкої рівноваги механічної системи, виходячи із теореми Ляпунова?

6. НАУКОВО-ДОСЛІДНІ РОБОТИ З МЕХАНІКИ З ВИКОРИСТАННЯМ КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Цей розділ присвячено самостійним науково-дослідним роботам у межах курсової роботи, передбаченої робочою навчальною програмою та навчальним планом для студентів спеціальностей за напрямом «Механіка» інженерно-фізичного факультету НТУ «ХПІ». Вибір комп'ютерних технологій для виконання завдань до курсових дослідних робіт надається студенту.

З появою електронних обчислювальних машин створювалися комп'ютерні програми для вирішення інженерних завдань, зокрема задач механіки, що реалізують обчислювальні алгоритми для можливості розв'язання рівнянь. Сучасний стан обчислювальної техніки дозволяє моделювати інженерні об'єкти, автоматизувати вивід рівнянь та отримання їх розв'язків, передоручивши багато проміжних операцій безпосередньо комп'ютеру. Широкий розвиток знайшли системи комп'ютерної алгебри, які дозволяють проводити символічні обчислення. На даний час реалізуються два напрямки. У першому застосовують універсальні математичні пакети програм, наприклад, широко відомі REDUCE, MAPLE, MATHCAD, MATLAB, MATHEMATICA. У другому створюють спеціалізовані пакети програм, спрямовані на вирішення проблемно-орієнтованих задач механіки, наприклад, такі комплекси, що отримали найбільше поширення: NASRTAN, ANSYS, COSMOS, MSC.ADAMS, APM WINMACHINE.

Недоліком цих пакетів є їх орієнтація на дискретне подання вхідної та вихідної інформації про об'єкт дослідження. З появою об'єктно-орієнтованих мов програмування та сучасних середовищ візуального проектування програм програмісти стали пропонувати нові пакети, що використовують символну або аналітичну інформацію про об'єкт дослідження. В них є вбудовані системи аналітичних обчислень, що здійснюють символічні перетворення. Представником таких пакетів є ПК КіДиМ, опис якого подано у першому розділі.

6.1. Дидактичні вказівки щодо виконання курсових дослідних робіт

Курсові дослідні роботи для студентів містять такі завдання: модуль № 1 – Статика, модуль № 2 – Кінематика (3-й семестр / 4 кредити); модуль № 3 – Динаміка точки, модуль 4 – Динаміка систем тіл (4-й семестр / 4 кредити).

6.1.1. Курсова робота за темою «АНАЛІЗ СТАТИКИ ТА КІНЕМАТИКИ СИСТЕМ ТІЛ».

Мета роботи:

◆набуття практичних умінь у вирішенні завдань зі статyki та кінематики при визначенні:

а) реакцій в'язей, які утримують матеріальну систему в рівновазі при дії на її елементи активних сил;

б) кінематичних характеристик руху точки, який є заданим за декартовими і натуральними законами, руху тіл та їхніх точок за заданими законами руху тіл;

◆набуття навичок роботи з обчислювальною технікою (комп'ютером з програмним забезпеченням) для підтвердження:

а) теоретичних положень статyki про умови рівноваги й пасивність реакцій в'язей системи матеріальних тіл, тобто реакції в'язей, що змінюються при переході до будь-яких інших систем активних сил та є залежними від виду в'язей;

б) теоретичного положення кінематики щодо незалежності кінематичних характеристик руху точок від вибору координатних систем (інваріантність властивостей руху точки) та про те, що записи рівностей для визначення швидкості й прискорення точок тіла є коваріантними, тобто у будь-яких інерційних системах відліку ці рівності однакові та не змінюють своєї векторної форми при переході до будь-яких інших припустимих систем координат, узгодженим зі в'язями.

Мета досліджень – вивчення закономірностей:

◆рівноваги системи матеріальних тіл і змін реакцій в'язей при переході до інших видів в'язей та активних сил;

♦ руху точки, заданого в різних системах координат, і вивчення закономірностей руху тіла та його точок, якщо рух тіла є заданим, або системи тіл, призначеної для перетворення руху одного або декількох тіл в необхідні рухи інших тіл.

Об'єкти досліджень:

♦ механічні системи тіл та реакції типових в'язей (опори, стержні, шарніри та інші), які при дії на тіла активних сил (збіжних, плоских, просторових) утримують матеріальну систему в рівновазі;

♦ векторні характеристики руху точки у площині та найпростіші рухи тіл та їхні перетворення механізмами – механічними системами тіл, призначених для перетворення руху одного або декількох тіл в необхідні рухи інших тіл.

Предмет досліджень:

♦ властивості реакцій в'язей системи матеріальних тіл і зміни реакцій при переході к іншим видам в'язей та активним силам;

♦ властивості траєкторії, векторів швидкості та прискорення рухомої точки і незалежність кінематичних характеристик від способу завдання закону руху точки або запису рівностей для визначення швидкості та прискорення точок тіла у припустимих системах координат (узгоджених із в'язями).

Методи досліджень містять аналітичні та комп'ютерні обчислювання.

Завдання до курсової роботи студентам видає викладач на 4 та 11-му тижнях 3-го семестру, протягом семестру він надає консультації та здійснює прийом завдань відповідно до модулів (7 та 15-й тижні). Прийом курсової роботи за 3-й семестр здійснює комісія на 16 та 17-му тижнях, тобто наприкінці семестру. Студент отримує за курсову роботу диференційований залік за болонською системою оцінювання, про що свідчить запис у заліковій книжці.

Курсова робота виконується за завданнями, які наведені у 2 і 3-му розділах посібника.

6.1.2. Курсова робота за темою «ДИНАМІКА ТОЧКИ ТА СИСТЕМ ТІЛ».

Мета роботи – набуття:

♦ практичних умінь у вирішенні завдань з динаміки щодо визначення законів руху: матеріальної точки, абсолютно твердого тіла, системи матеріальних точок та тіл (механічної системи) з урахуванням мас і під дією прикладених до них сил;

♦ навичок роботи з обчислювальною технікою (комп'ютером з програмним забезпеченням) у моделюванні та дослідженні закономірностей механічного стану і властивостей динаміки механічних (матеріальних) систем на базі диференціальних рівнянь руху, які в інваріантній формі є наслідком теоретичних положень і фундаментальних принципів аналітичної механіки.

Мета досліджень – вивчення закономірностей і властивостей руху механічних (матеріальних) систем на базі інваріантних форм моделювання їхньої динаміки.

Об'єкт досліджень – матеріальні точки або абсолютно тверді тіла і механічні (матеріальні) системи, які під дією прикладених до них сил переміщуються у просторі й часі.

Предметом досліджень – закони руху матеріальних точок та абсолютно твердих тіл і механічних (матеріальних) систем з урахуванням мас і під дією прикладених до них сил, закономірності зміни у часі мір механічного руху і дії сил: кількості руху, кінетичного моменту, кінетичної та повної енергії, роботи й потужності сил, а також кінематичних характеристик руху: швидкостей, прискорень й переміщення з початкового положення в інше, які визначають шляхом розв'язування диференціальних рівнянь руху механічних систем, що в інваріантній формі є наслідком теоретичних положень і фундаментальних принципів аналітичної механіки.

Методи досліджень – це найбільш загальні аналітичні методи розв'язання задач механіки та комп'ютерні обчислювання.

Завдання до курсової дослідної роботи студентам видає викладач на 4 та 11-му тижнях 4-го семестру, він протягом семестру надає консультації та здійснює прийом завдань відповідно до модулів (7 та 15-й

тижні). Прийом курсової роботи за відповідними модулями у 4-му семестрі здійснює лектор, який виставляє у залікову книжку диференційований залік (за болонською системою оцінювання) на 8 та 16-му тижнях семестру.

Курсова робота виконується за завданнями, які наведені у 4-му розділі посібника.

6.2. Зразок оформлення курсової роботи

На наступних сторінках наведено зразок оформлення курсової роботи за темою *«АНАЛІЗ СТАТИКИ ТА КІНЕМАТИКИ СИСТЕМ ТІЛ»*.

Курсова робота складається із стандартних розділів: *ЗМІСТ, ВСТУП, ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ СТАТИКИ ТА КІНЕМАТИКИ, АНАЛІЗ СТАТИКИ, АНАЛІЗ КІНЕМАТИКИ* (обидва – засобами ПК КіДиМ), *ВИСНОВКИ* та *ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ*.

Кожний розділ містить змістовну частину та короткі коментарі. Частини, пов'язані із аналізом, повинні містити тексти файлів вихідної інформації для ПК КіДиМ та окремі графічні результати у форматі постпроцесору ПК КіДиМ.

Наведений далі зразок містить мінімально необхідний обсяг інформації за темою дослідження. Кожен студент має змогу розширити змістовну частину за рахунок додаткових досліджень та відповідного аналізу подібно до розібраних у розділах 2 та 3 прикладів.

Зразок оформлення титульної сторінки

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Кафедра теоретичної механіки

КУРСОВА РОБОТА

з дисципліни «Теоретична механіка»

на тему «АНАЛІЗ СТАТИКИ ТА КІНЕМАТИКИ СИСТЕМ ТІЛ»

Виконав:

студент групи І-17а, Петренко І.О.

Керівник:

доц. Лавінський Д.В.

Харків НТУ «ХПІ» 2013

ЗМІСТ

Вступ	3
1. Постановка задач статички та кінематики	4
2. Статичний аналіз рівноваги систем тіл	5
2.1. Визначення реакцій в'язів для тіла при дії плоскої системи сил	5
2.2. Визначення реакцій в'язів для системи тіл при дії плоскої системи сил	7
2.3. Визначення реакцій в'язів для тіла при дії просторової системи сил	9
3. Кінематичний аналіз систем тіл	11
3.1. Визначення кінематичних характеристик руху системи тіл	11
3.2. Визначення кінематичних характеристик складного руху точки та системи тіл	14
Висновки	16
Перелік літературних джерел	17

ВСТУП

У курсовій роботі надано результати, одержані за темою досліджень. В основу аналізу покладено теоретичні положення статички та кінематики абсолютно твердих тіл [1,2]. Для досліджень застосовано комп'ютерні технології [3], реалізовані на базі програмного комплексу «КіДиМ» [4].

У першому розділі наведено розрахункові схеми та вихідні дані згідно з індивідуальним завданням для досліджень.

У другому розділі надано результати розрахунків та розробки файлів КіДиМ для виконання досліджень статичного аналізу системи тіл при дії плоскої та просторової систем сил згідно з індивідуальним завданням.

У третьому розділі надано результати розрахунків та програмні розробки для виконання досліджень з аналізом кінематики систем тіл та складного руху точки відповідно до індивідуального завдання.

Наприкінці роботи сформульовано короткі висновки та перелічено використані літературні джерела.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ СТАТИКИ ТА КІНЕМАТИКИ

Для заданих варіантів розрахункових схем необхідно визначити реакції в'язей систем тіл, поданих на рисунку 6.1, та проаналізувати залежність реакцій від кута нахилу активної сили \vec{F} .

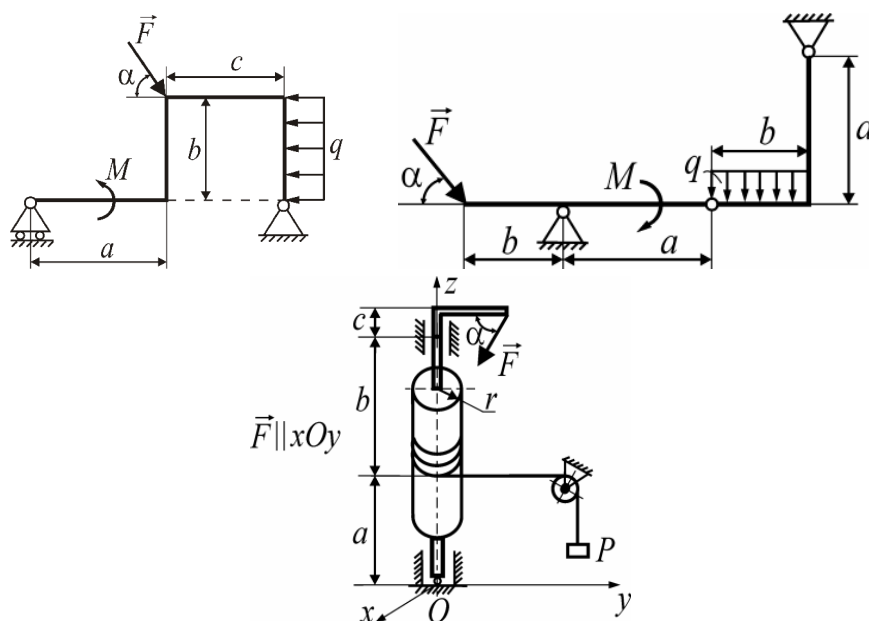


Рисунок 6.1 – Схеми для аналізу статички тіл

Для заданих варіантів розрахункових схем, наданих на рис. 6.2, необхідно:

- ♦ визначити кінематичні характеристики плоскопаралельного руху тіл, які складають кривошипно-шатунний механізм та точок B и C , закон руху задано залежністю від часу кута обертання кривошипу – φ_{OA} ;

- ♦ знайти абсолютні швидкість й прискорення точки M у складному русі разом з тілом D , що обертається навколо нормальної до площини осі, яка проходить через точку O_1 . Закони руху задано залежностями від часу кута обертання $\varphi_e(t)$ та відносного руху точки $OM_r(t)$.

Дослідження зі статики необхідно виконати при варіюванні α $[0 \leq \alpha \leq 360^\circ]$ – кута нахилу сили, дослідження з кінематики – при варіюванні $[0 \leq t \leq t_*]$ – часу.

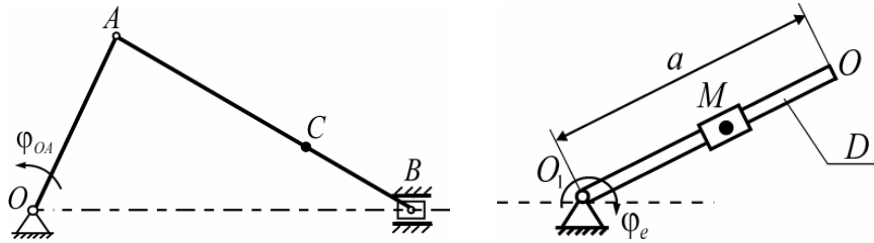


Рисунок 6.2 – Схеми для аналізу кінематики тіл

2. СТАТИЧНИЙ АНАЛІЗ РІВНОВАГИ СИСТЕМ ТІЛ

2.1. Визначення реакцій в'язей для тіла при дії плоскої системи сил

Файл вихідної інформації для ПК КіДиМ [4], складений з метою визначення та аналізу реакцій опор при дії плоскої системи сил на тверде тіло, має такий вигляд.

```
РАБОТА:= № 1.1;
ВЫПОЛНИЛ:= Петренко І.О., И-17а;
P.x = XA + F*cos(alfa) - Q;
P.y = YA - F*sin(alfa) + RB;
P.fiz = Q*b/2+F*sin(alfa)*c-F*cos(alfa)*b+M-RB*(a+c);
F = 90; M = 63; q = 12; a = 10; b = 8; c = 6; Q = q*b;
alfa = alfaG*PI/180;
RA = sqrt(XA^2 + YA^2);
e = abs(RA - F)*100/F;
НЕИЗВЕСТНЫЕ:= XA,YA,RB;
ВАРЬИРОВАТЬ:= alfaG(0,360);
ПОКАЗАТЬ:= RA,e;
РАСЧЕТ:= СТАТИКА;
КОНЕЦ;
```

Наведемо окремі розрахункові дані у вигляді графіків, які характеризують залежності сил реакцій від кута нахилу активної зосередженої сили.

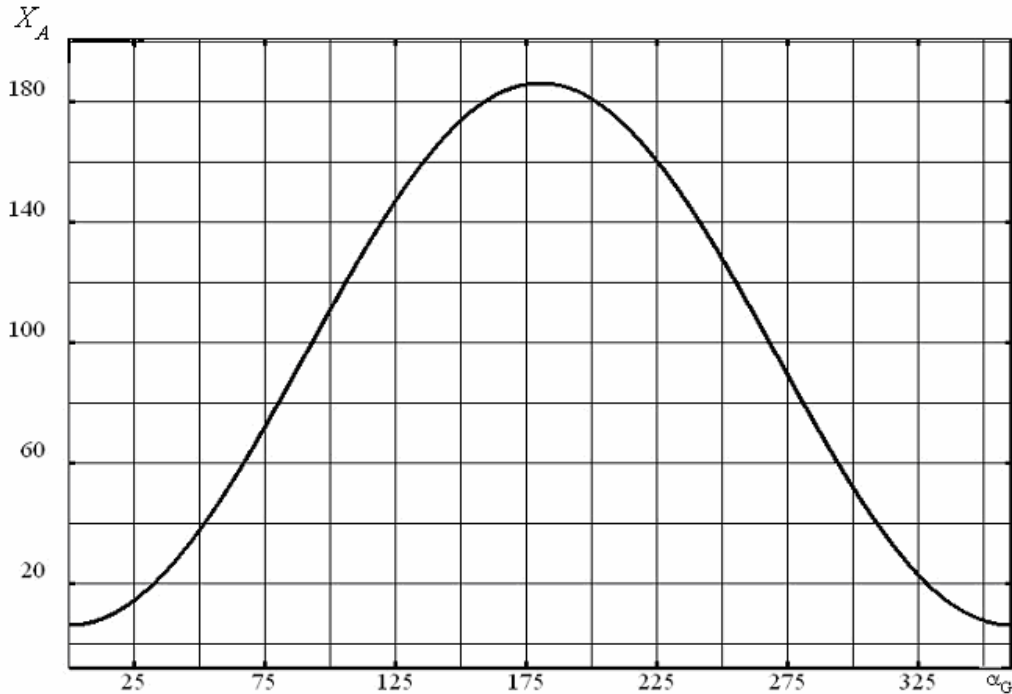


Рисунок 6.3 – Залежність горизонтальної складової сили реакції точки A від кута нахилу активної зосередженої сили

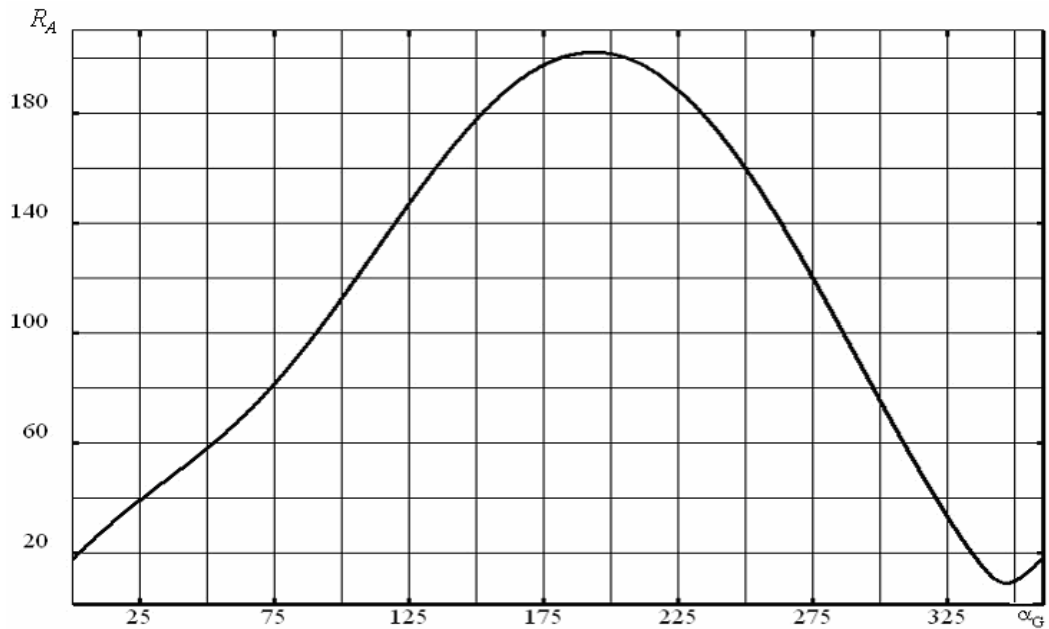


Рисунок 6.4 – Залежність модуля реакції точки A від кута нахилу активної зосередженої сили

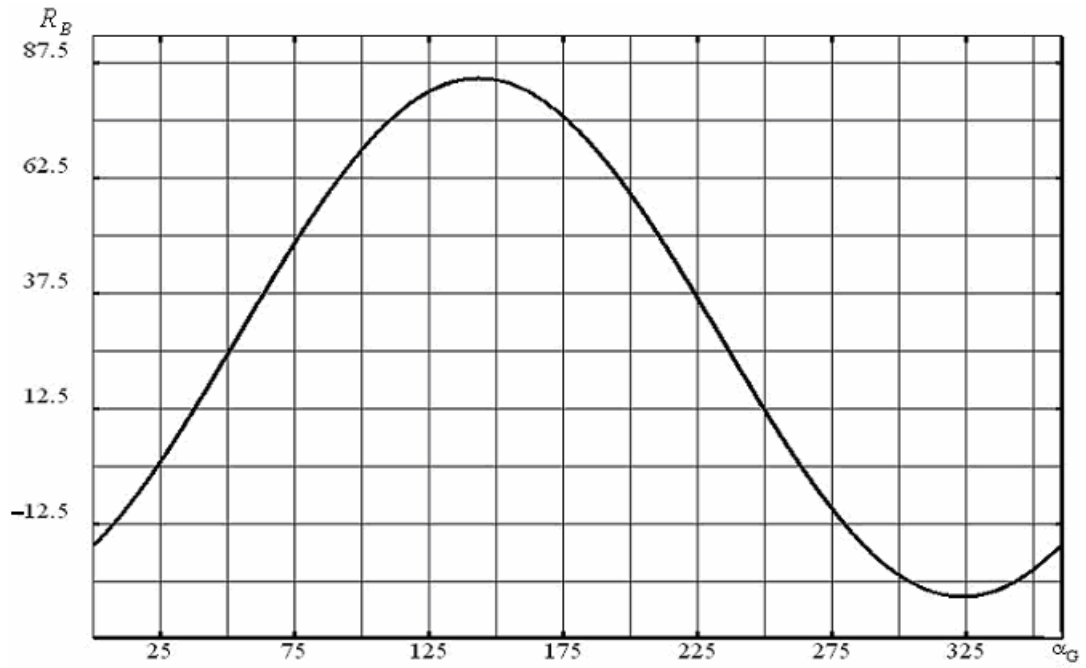


Рисунок 6.5 – Залежність модуля сили реакції точки B від кута нахилу активної зосередженої сили

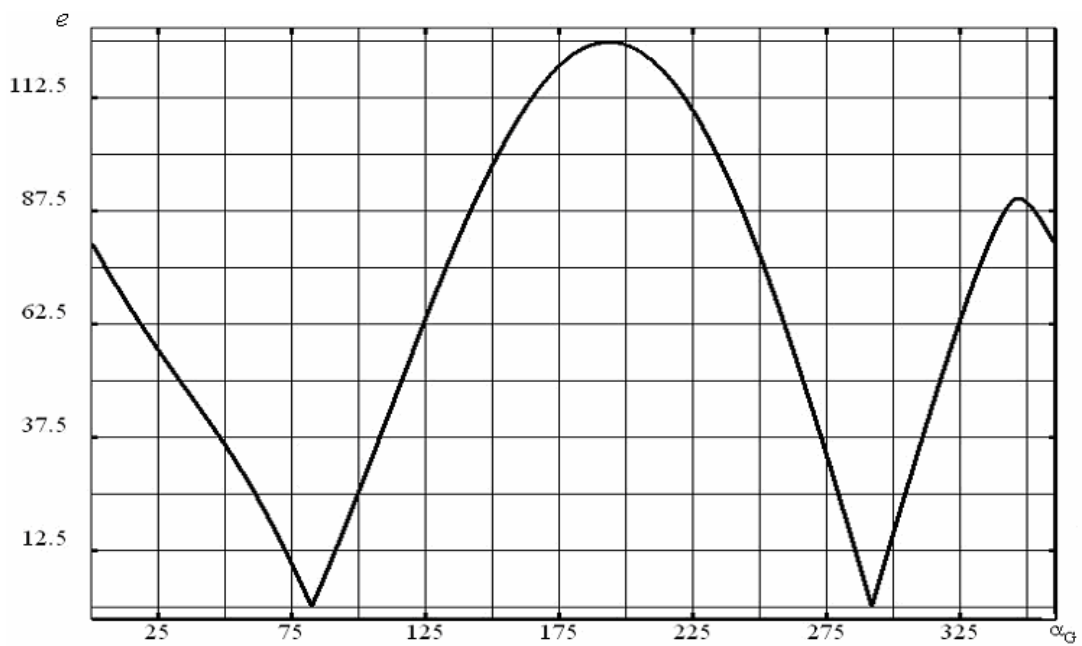


Рисунок 6.6 – Залежність параметра e , який характеризує співвідношення активної зосередженої сили та реакції R_A від кута нахилу цієї сили

2.2. Визначення реакцій в'язей при дії плоскої системи сил на систему двох тіл

Файл вихідної інформації для ПК КіДиМ [4], складений для визначення та аналізу реакцій опор при дії плоскої системи сил на систему двох тіл, має такий вигляд.

```
РАБОТА:= № 1.2;  
ВЫПОЛНИЛ:= Петренко І.О., И-17а;  
P.x1 = XA + F*cos(alfa) + RCX;  
P.y1 = YA - F*sin(alfa) + RCY;  
P.fiz1 = F*sin(alfa)*b + RCY*a - M;  
P.x2 = XB- RCX;  
P.y2 = - RCY + YB - Q;  
P.fiz2 = Q*b/2 - RCX*a + RCY*b;  
F = 90; M = 63; q = 12; a = 10; b = 8; Q = q*b;  
RC = sqrt(RCX^2 + RCY^2);  
RA = sqrt(XA^2 + YA^2);  
RB = sqrt(XB^2 + YB^2);  
e1 = abs(RA - RC)*100/abs(RA);  
e2 = abs(RB - RC)*100/abs(RB);  
НЕИЗВЕСТНЫЕ := XA,YA, XB, YB, RCX, RCY;  
ВАРЬИРОВАТЬ := alfaG(0,360); alfa = alfaG*PI/180;  
ПОКАЗАТЬ:= RA,RC,RB,e1,e2;  
РАСЧЕТ:= СТАТИКА;  
КОНЕЦ;
```

Наведемо окремі розрахункові дані у вигляді графіків, які характеризують залежності сил реакцій від кута нахилу активної зосередженої сили.

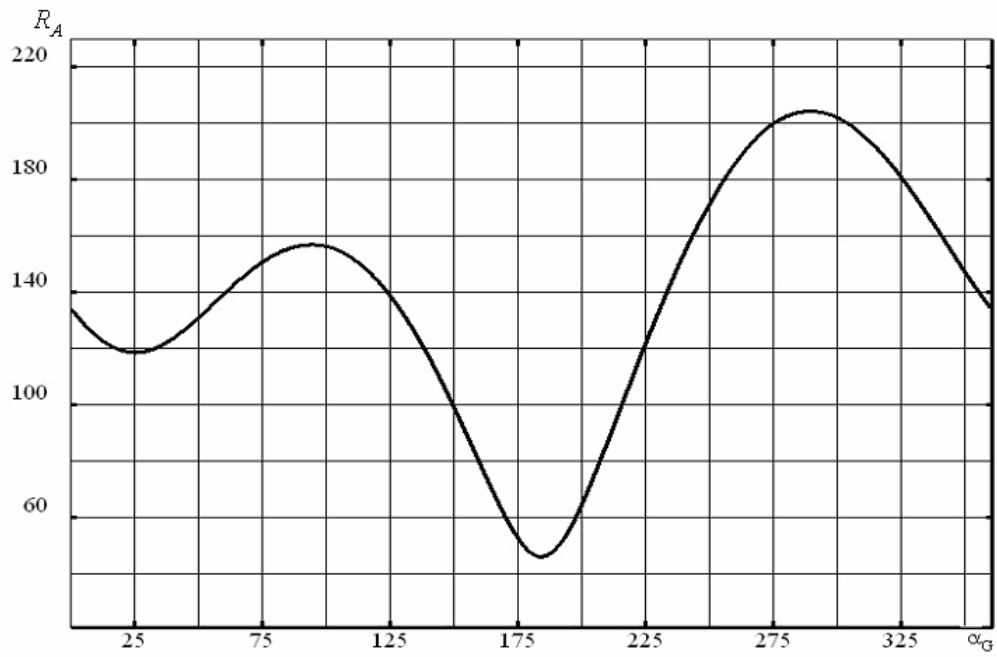


Рисунок 6.7 – Залежність модуля сили реакції точки A від кута нахилу активної зосередженої сили

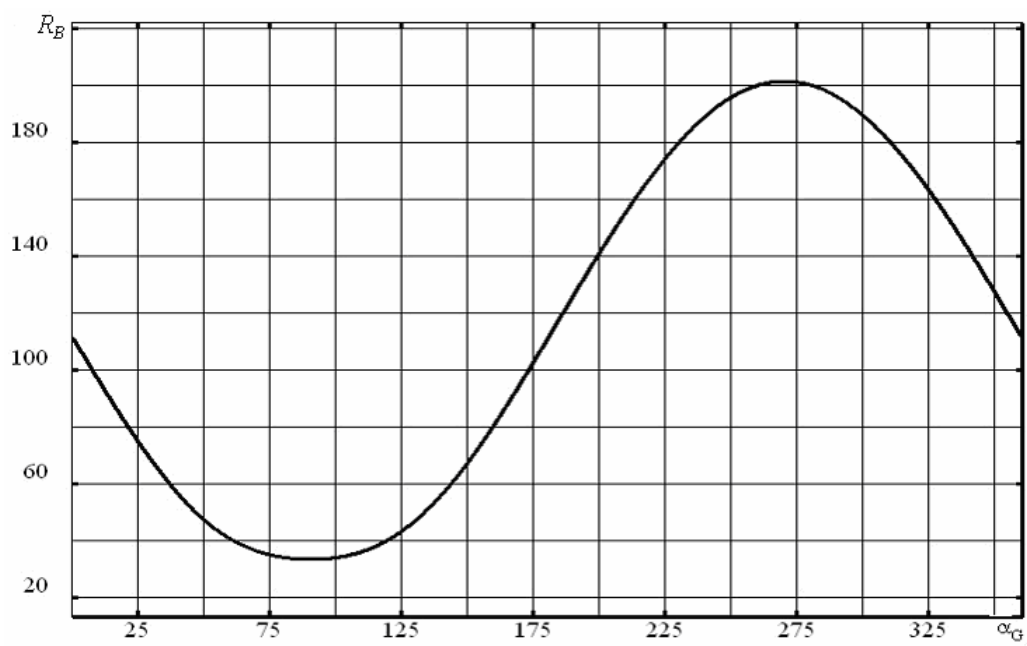


Рисунок 6.8 – Залежність модуля сили реакції точки B від кута нахилу активної зосередженої сили

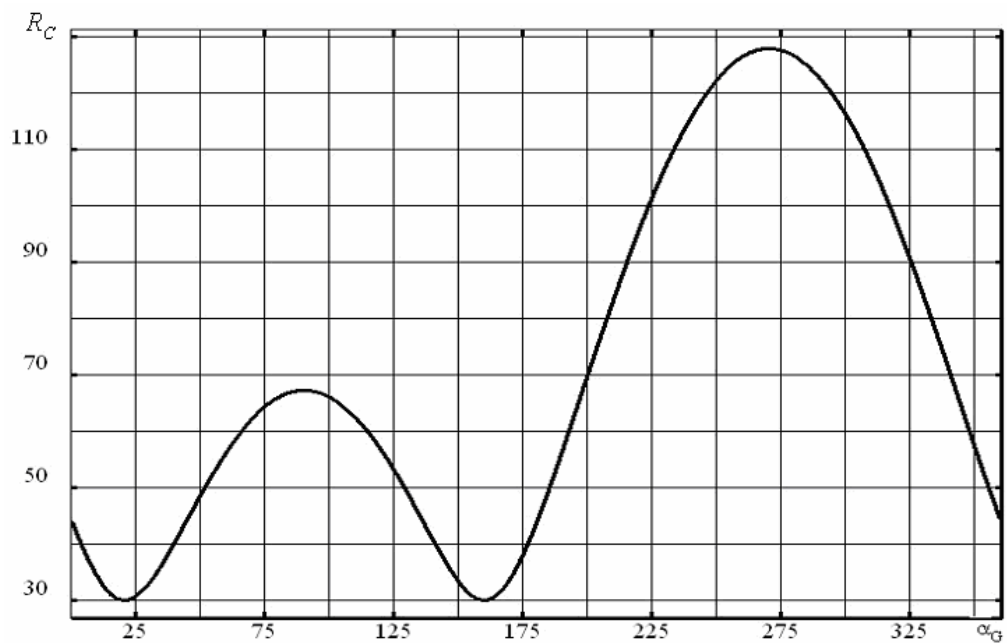


Рисунок 6.9 – Залежність модуля сили тиску в шарнірі точки C від кута нахилу активної зосередженої сили

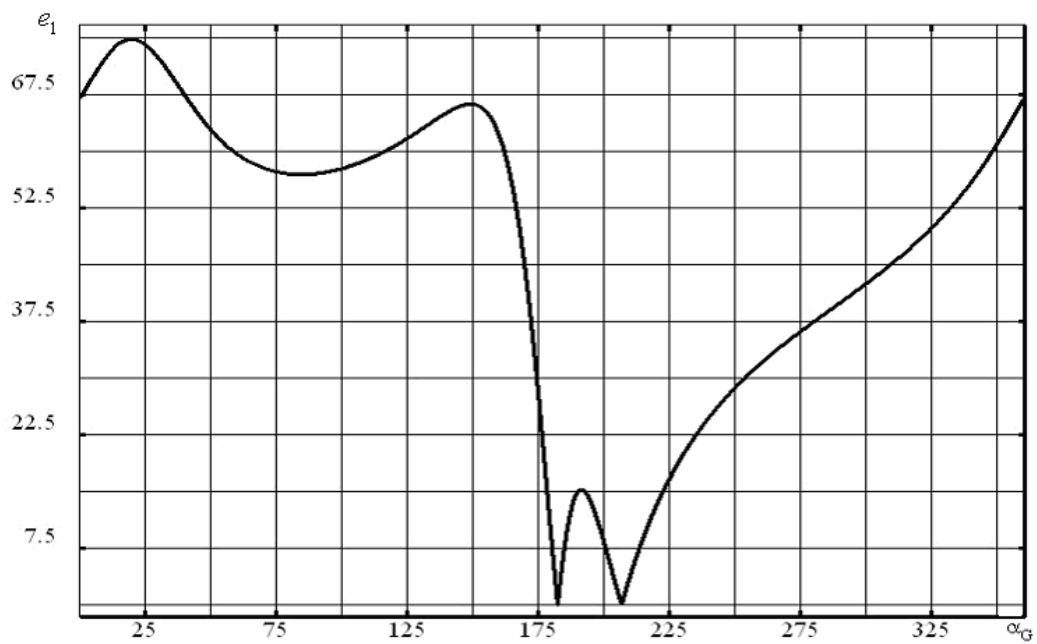


Рисунок 6.10 – Залежність параметра e_1 , який характеризує різницю між реакціями R_A та R_C від кута нахилу активної зосередженої сили

2.3. Визначення реакцій в'язей для тіла при дії просторової системи сил

Файл вихідної інформації для ПК КіДиМ [4], складений з метою визначення та аналізу реакцій опор при дії просторової системи сил на тверде тіло, має такий вигляд.

```
РАБОТА:= № 1.3;  
ВЫПОЛНИЛ:= Петренко І.О., гр. И-17а;  
P.x = XO + XB + F*sin(alfa);  
P.y = YO + YB - F*cos(alfa) + P;  
P.fix = - P*a + F*cos(alfa)*(a+b+c) - YB*(a + b);  
P.fiy = - XB*(a+b) - F*sin(alfa)*(a+b+c);  
P.fiz = P*r - F*sin(alfa)*2*c;  
F = 90; a = 10; b = 5; c = 2; r = 0.8;  
alfa = alfaG*PI/180;  
НЕИЗВЕСТНЫЕ:=XO,YO, XB,YB, P;  
ВАРЬИРОВАТЬ:= alfaG (0,360);  
РАСЧЕТ:=СТАТИКА;  
КОНЕЦ;
```

Наведемо окремі розрахункові дані у вигляді графіків, які характеризують залежності сил реакцій від кута нахилу активної сили.

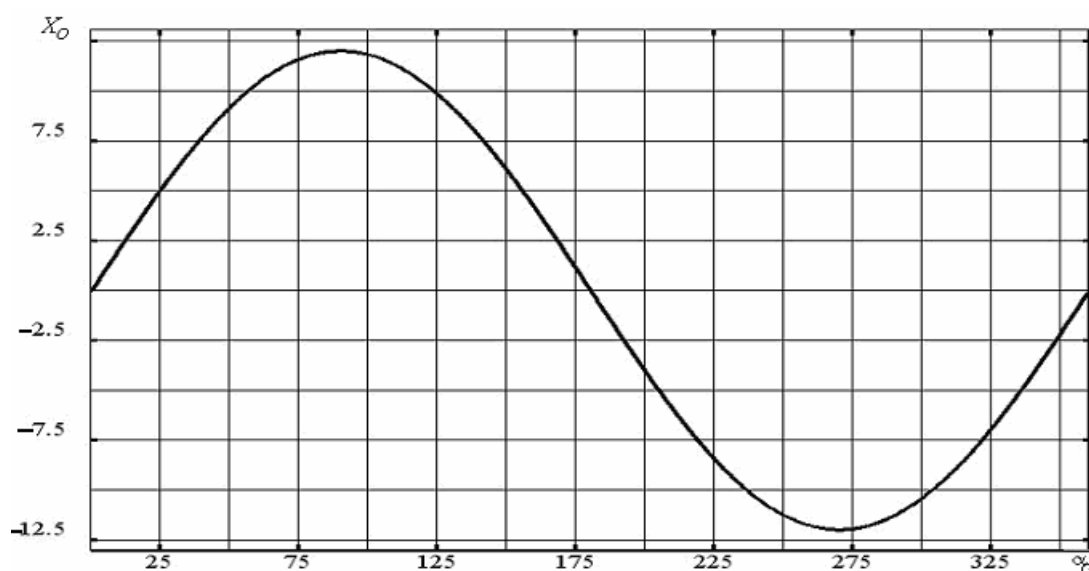


Рисунок 6.11 – Залежність горизонтальної складової реакції опори O від кута нахилу активної зосередженої сили

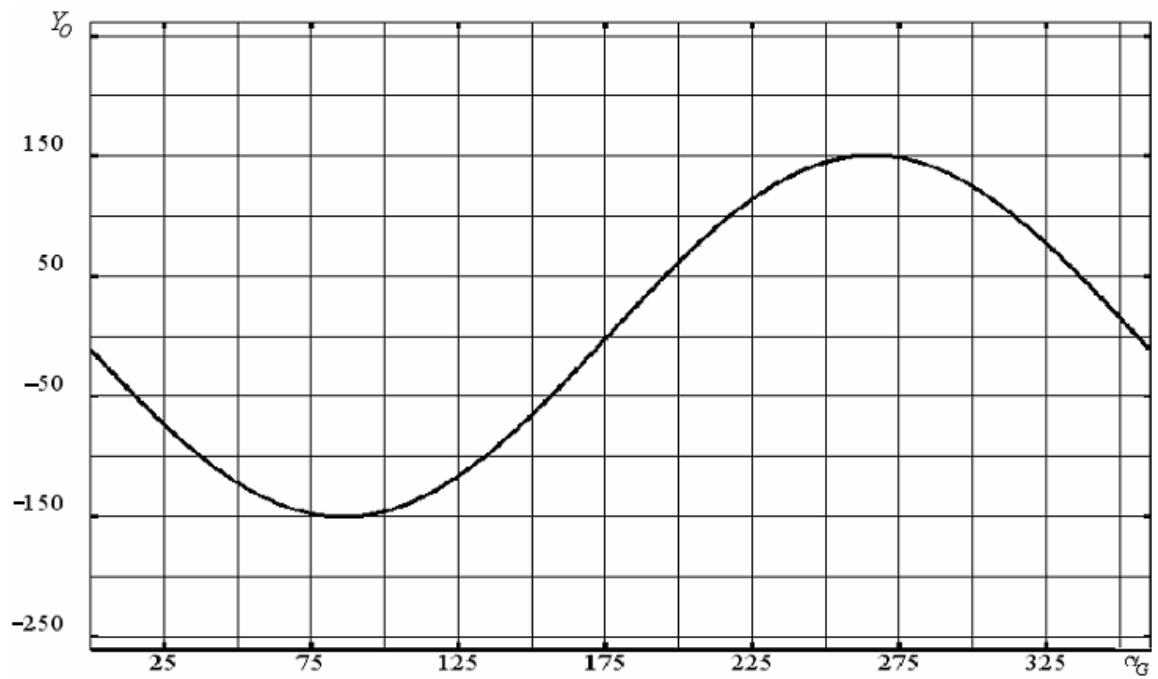


Рисунок 6.12 – Залежність вертикальної складової сили реакції опори O від кута нахилу активної зосередженої сили

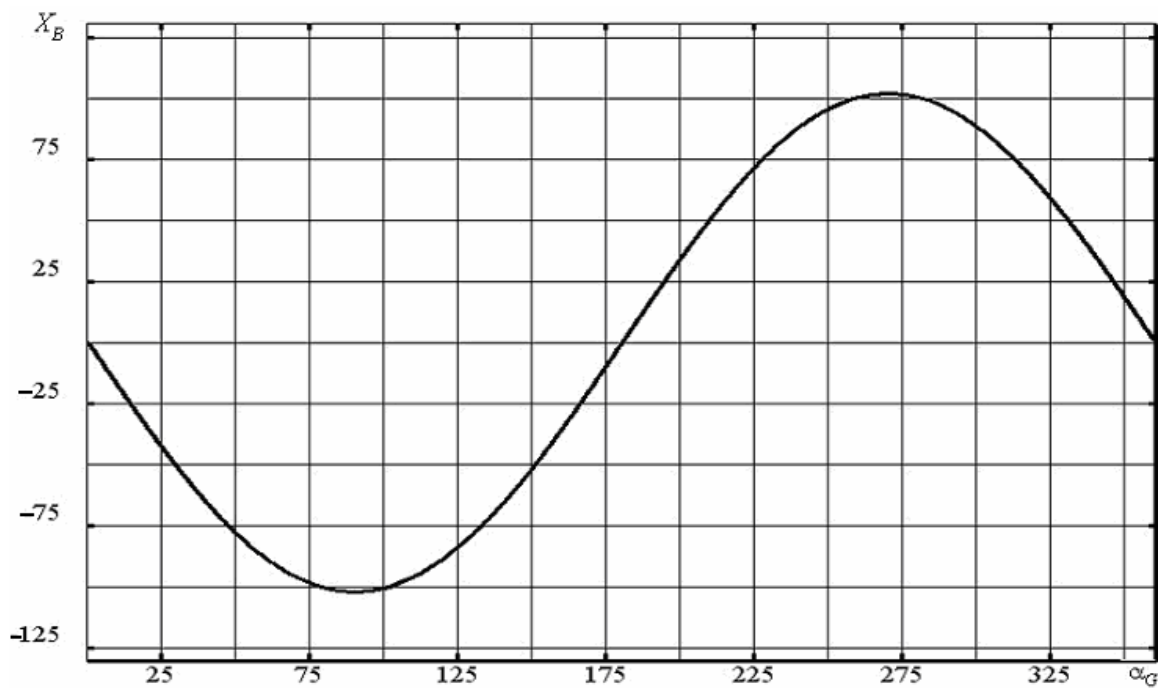


Рисунок 6.13 – Залежність горизонтальної складової сили реакції т. B від кута нахилу активної зосередженої сили

3. АНАЛІЗ КІНЕМАТИКИ СИСТЕМ ТІЛ

3.1. Визначення кінематичних характеристик руху системи тіл при плоскопаралельному русі систем тіл

Файл вихідної інформації для ПК КіДиМ [4], складений з метою аналізу основних кінематичних характеристик при плоскопаралельному русі заданої системи тіл, має такий вигляд.

```
РАБОТА:= № 2.1;
ВЫПОЛНИЛ:= Петренко І.О., И-17а;
fiOA = t^2;
OA = 10; AB = 15; AC = 10;
XA = OA*cos(fiOA); YA = OA*sin(fiOA);
XB = XA + sqrt(AB^2 - YA^2); YB = 0;
XC = XA + sqrt(AB^2 - YA^2)*AC/AB; YC = YA*(AB - AC)/AB;
vAx = XA't; vAy = YA't; vA = sqrt(vAx^2 + vAy^2);
vBx = XB't; vBy = YB't; vB = sqrt(vBx^2 + vBy^2);
vCx = XC't; vCy = YC't; vC = sqrt(vCx^2 + vCy^2);
aAx = XA't't; aAy = YA't't; aA = sqrt(aAx^2 + aAy^2);
aBx = XB't't; aBy = YB't't; aB = sqrt(aBx^2 + aBy^2);
aCx = XC't't; aCy = YC't't; aC = sqrt(aCx^2 + aCy^2);
fiOAG = fiOA*180/PI;
omegaOA = fiOA't; epsilonOA = fiOA't't;
wx = vBx - vAx; wy = vBy - vAy;
omegaAB = sqrt(wx^2 + wy^2)/AB;
ex = aBx - aAx; ey = aBy - aAy;
epsilonAB = sqrt(ex^2 + ey^2)/AB;
ВАРЬИРОВАТЬ:= t, 0, 10;
ПЕЧАТАТЬ:= YA(XA), YC(XC), fiOA, vB(fiOAG), aB(fiOAG),
vC(fiOAG), aC(fiOAG), vA(fiOAG), aA(fiOAG);
СРАВНИТЬ:= абсциси(XA,XB,XC), ординати(YA,YB,YC),
швидкості(vA,vB,vC), прискорення(aA,aB,aC),
кутові швидкості(omegaOA,omegaAB), кутові
прискорення(epsilonOA,epsilonAB);
РАСЧЕТ:= КИНЕМАТИКА;
КОНЕЦ;
```

Наведемо окремі розрахункові дані у вигляді графіків, які ілюструють форму траєкторії точки C шатуна, показують залежність швидкості точки B від кута повороту кривошипа φ_{OA} та характеризують за-

лежність від часу кутових швидкостей та прискорень окремих ланок механізму.

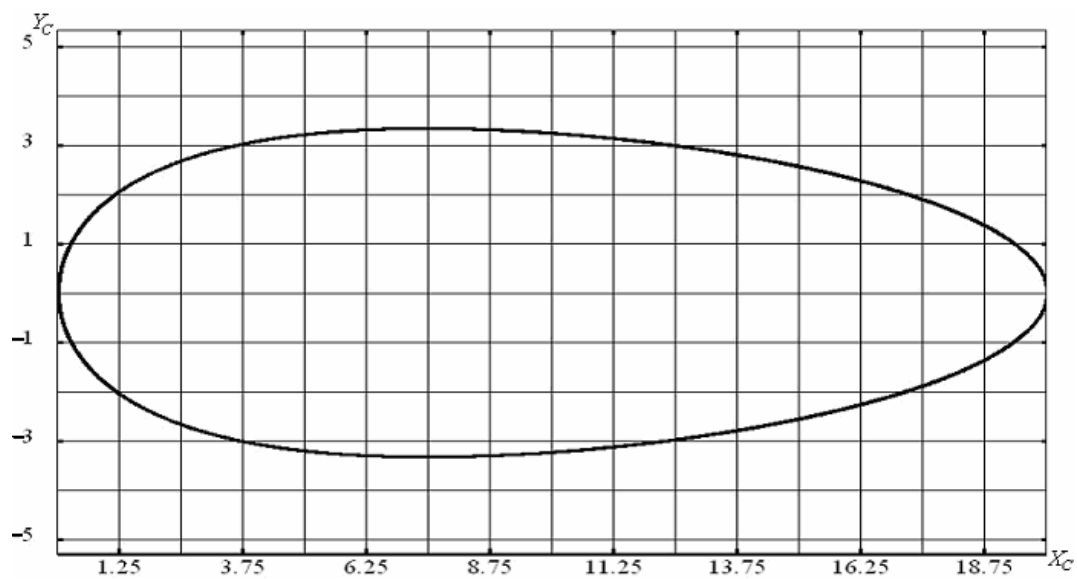


Рисунок 6.14 – Форма траєкторії точки C шатуна

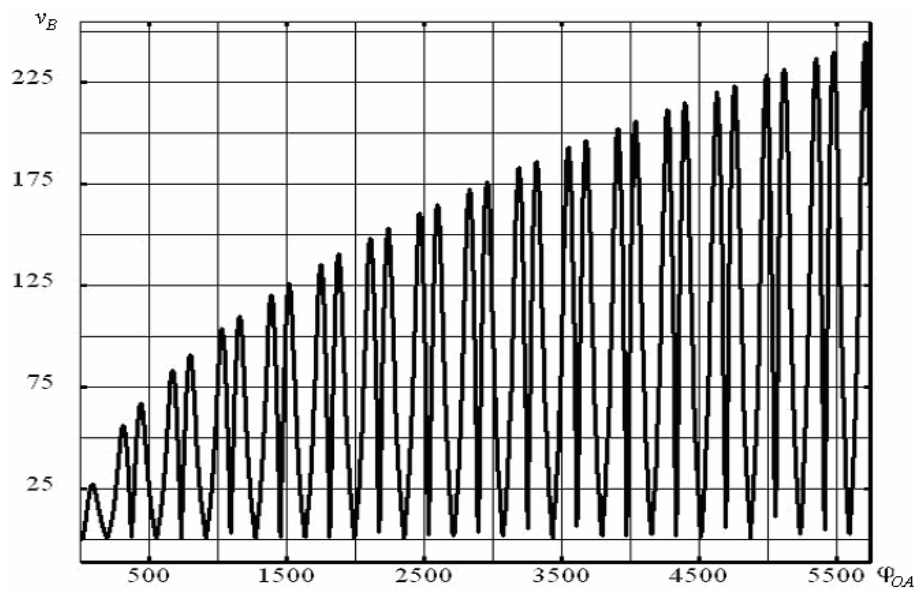


Рисунок 6.15 – Залежність швидкості точки B від кута повороту кривошипа φ_{OA}

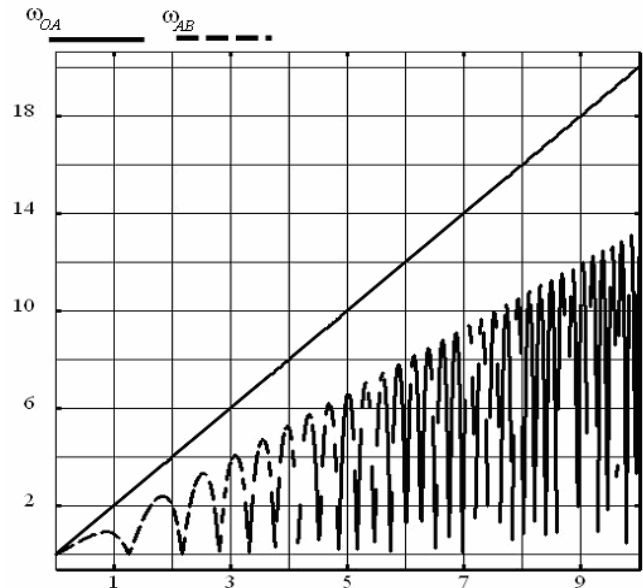


Рисунок 6.16 – Залежність від часу кутових швидкостей ланок OA і AB механізму

3.2. Визначення кінематичних характеристик при складному русі точки

Файл вихідної інформації для ПК КіДиМ [4], складений з метою визначення та аналізу основних кінематичних характеристик складного руху точки, має такий вигляд.

```
РАБОТА:= № 2.2;ВЫПОЛНИЛ:= Петренко І.О., И-17а;
fie = 2*t; Sr = a*sin(t)^2; a=1;O1M = (a - Sr);
XM = O1M*cos(PI - fie); YM = O1M*sin(PI - fie);
VXM = XM't; VYM = YM't; VM = sqrt(VXM^2 + VYM^2);
AXM = VXM't; AYM = VYM't; AM = sqrt(AXM^2 + AYM^2);
omega = fie't; eps = omega't; vMp = O1M*omega; vMr = Sr't;
aMp = O1M*sqrt(omega^4 + eps^2); aMr = Sr't't;
aMcor = 2*omega*vMr; fieG = fie*180/PI;
ВАРЬИРОВАТЬ:= t, 0, 6; ПЕЧАТАТЬ:= Sr,VM, AM, YM(XM),
VM(fieG),VM(Sr);
СРАВНИТЬ:= швидкості (vMp,vMr,VM),
    прискорення (AM,aMp,aMr,aMcor);
РАСЧЕТ:= КИНЕМАТИКА;КОНЕЦ;
```

Наведемо окремі розрахункові дані у вигляді графіків, які характеризують залежність від часу абсолютних, відносних, переносних швидкості та прискорення при складному русі точки.

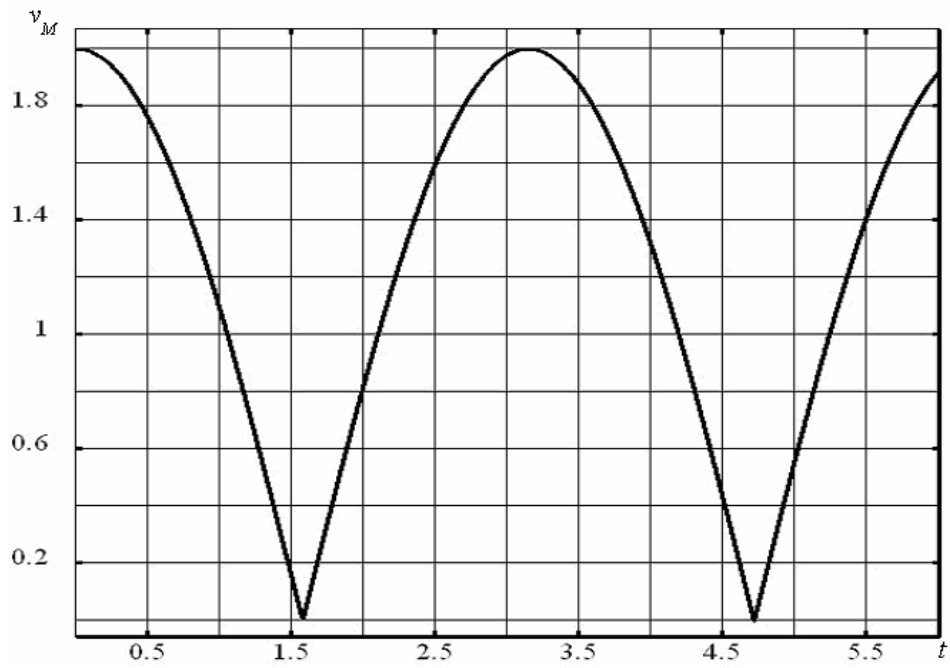


Рисунок 6.17 – Залежність від часу абсолютної швидкості точки M

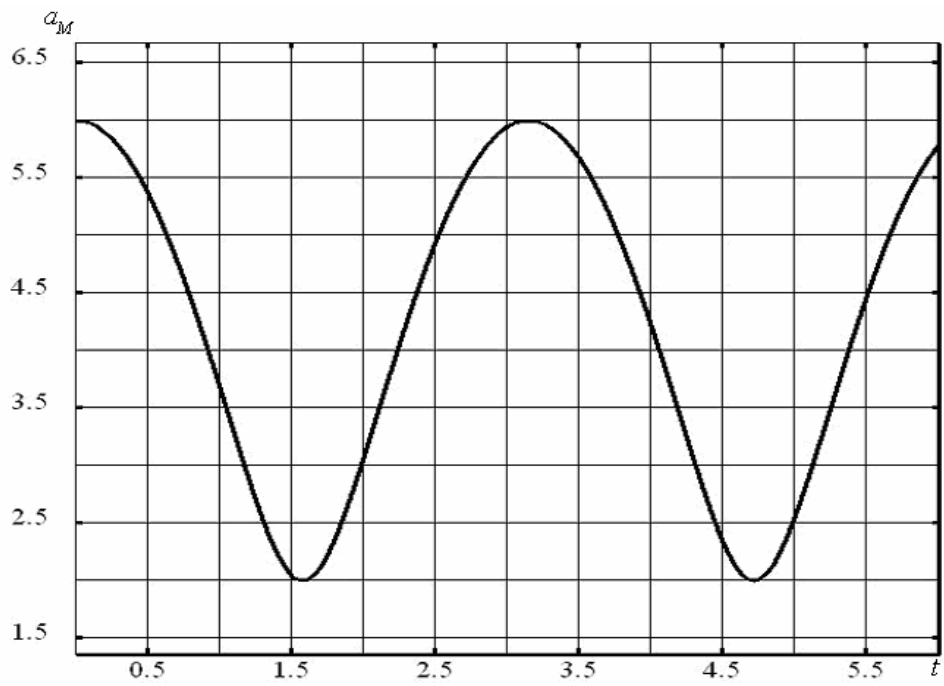


Рисунок 6.18 – Залежність від часу абсолютного прискорення точки M

ВИСНОВКИ

В курсовій роботі:

◆ складені файли вихідної інформації для ПК КіДиМ, які дозволяють проводити аналіз статички системи тіл при дії плоскої та просторової системи сил;

◆ наведені розрахункові дані з визначення реакцій в'язей систем тіл при дії плоскої та просторової систем сил;

◆ складені файли вихідної інформації для ПК КіДиМ, які дозволяють проводити аналіз кінематики плоского руху системи тіл та складного руху точки;

◆ наведені розрахункові дані з визначення основних кінематичних характеристик тіл та точок при плоскому русі та при складному русі точки.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Павловський М.А. Теоретична механіка : Підручник / М.А. Павловський – К. : Техніка, 2002. – 512 с.

2. Смерека І.П. Короткий довідник з теоретичної механіки : навч. посіб. / І.П. Смерека, А.Ф. Барвінський, Б.Д. Білоус та ін. – Львів: «Інтелект-Захід», 2001. – 240 с.

3. Андреев Ю.М. Практикум по теоретической и аналитической механике с применением ПЭВМ: учеб. пособ. / Ю.М. Андреев, Е.И. Дружинин, А.А. Ларин – Х. : НТУ «ХПИ», 2004. – 100 с.

4. Лавинский Д.В. Информационные технологии в аналитической механике : учеб. пособ. / Д.В. Лавинский, О.К. Морачковский – Х. : НТУ «ХПИ», 2007. – 184 с.

7. КОМП'ЮТЕРНИЙ ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

Даний розділ посібника присвячено викладенню комп'ютерного лабораторного практикуму з теоретичної механіки, заснованому на сучасних інформаційних технологіях та створеного на кафедрі теоретичної механіки Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».

Сучасна освіта припускає проведення практичних та лабораторних занять із застосуванням комп'ютерних та Інтернет-технологій, поширення набувають сучасні електронні конспекти лекцій, електронні версії методичних вказівок, мультимедійні продукти (віртуальні лабораторні роботи, лекційні демонстрації тощо), спеціалізовані бази даних та комп'ютерні лабораторні практикуми. Завданням таких розробок є надання допомоги студенту і викладачу в тому, щоб з мінімальними витратами на освоєння інформаційних технологій переконатися в повноцінності отриманих знань. Найбільшою привабливістю володіють програмні продукти, що містять текстовий, математичний і графічний процесори.

У першій частині посібника вже були наведені загальні відомості про ПК «КіДиМ», розглянуті питання комп'ютерного аналізу статички, кінематики та динаміки машин і механізмів. Поданий у цьому розділі комп'ютерний практикум містить комп'ютерні лабораторні роботи, що ілюструють дослідження із визначення кінематичних характеристик руху точок та рівноваги механічної системи, та їх можна виконати самостійно у ВНЗ або дома. Комп'ютерні програмні реалізації дозволяють наочно ілюструвати загальні закономірності руху або моделювати певні технологічні операції. Кожна робота складається з двох частин: аналітичного та комп'ютерного моделювання. Теоретичні відомості, які необхідні для проведення досліджень, подані в роботах або їх можна знайти у попередніх розділах посібника.

7.1. Робота 1. Комп'ютерне моделювання кінематики точки, яка здійснює одночасно два ортогональних коливання

Мета роботи – вивчення в декартових та натуральних координатах закономірностей руху точки, яка здійснює одночасно два гармонічні коливання у двох взаємно ортогональних напрямках.

Об'єкт досліджень – точка, що здійснює циклічний рух, який є заданим в декартових координатах у площині.

Предмет досліджень – кінематичні характеристики: траєкторії, вектори та годографи швидкості та прискорення точки, яка здійснює одночасно два гармонічних коливання у двох взаємно ортогональних напрямках.

Методи досліджень містять аналітичне та комп'ютерне моделювання.

Завдання

1. Дослідити закономірності руху точки, яка здійснює одночасно два гармонічних коливання у двох взаємно ортогональних напрямках, по простих траєкторіях та по кривих фігур Ліссажу.

2. Встановити інваріантність траєкторії, векторів швидкості та прискорення.

3. Встановити інваріантність годографів швидкості та прискорення.

4. Освоїти послідовність завдань до досліджень закономірностей руху точки по простих траєкторіях та по кривих фігур Ліссажу в декартових та натуральних координатах та встановити інваріантність годографів швидкості й прискорення.

5. За варіюванням параметрів в заданому декартовому законі руху точки встановити якісні й кількісні зміни виду її траєкторії, швидкості й прискорення.

Аналітичне моделювання кінематики точки

Розглянемо рух точки, яка здійснює одночасно два гармонічних коливання у двох взаємно ортогональних напрямках, як показано на рис. 7.1. Використовуючи засоби ПК КіДиМ, визначимо для неї кіне-

матичні характеристики: траєкторії, вектори та годографи швидкості й прискорення при русі точки по незамкнених та замкнених траєкторіях. При моделюванні розглянемо завдання руху точки по простих траєкторіях – прямих та спіралях, по колу, еліпсах та гіперболах, а далі, по складних траєкторіях – фігурах Ліссажу.

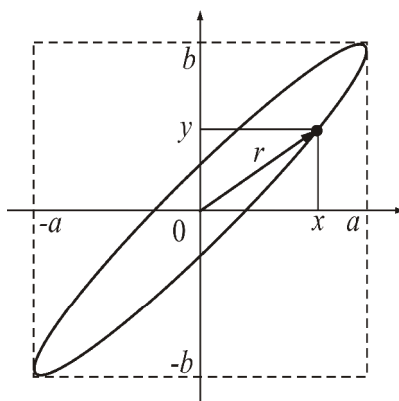


Рисунок 7.1 – Загальний вигляд траєкторії точки, яка здійснює одночасно два гармонічні коливання у двох взаємно ортогональних напрямках

Фігури Ліссажу – траєкторії, які окреслює точка, що здійснює одночасно два гармонічних коливання у двох взаємно ортогональних напрямках (див. рис. 7.1). Уперше ці фігури були вивчені французьким ученим Ж. Ліссажу (J. Lissajous, 1822–1880 pp.). Якщо рух точки супроводжується взаємно ортогональними коливаннями, то закон її руху можна задати радіус-вектором:

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = a \sin(n_1 t + \varphi_1) \vec{i} + b \sin(n_2 t + \varphi_2) \vec{j},$$

або у декартових координатах

$$x(t) = a \sin(n_1 t + \varphi_1); \quad y(t) = b \sin(n_2 t + \varphi_2),$$

де a, b – амплітуди коливань; n_1, n_2 – частоти; φ_1, φ_2 – початкові фази. Подібні коливання можуть бути **синхронними** (при $n_1 = n_2$) та **несинхронними** (при $n_1 \neq n_2$). У випадку синхронних коливань, виключивши із закону руху за допомогою тригонометричних перетворень час t , отримаємо рівняння траєкторії руху точки у декартових координатах:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 2\frac{xy}{ab}\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2),$$

яке є рівнянням еліпса (кола – при $a = b$). Півосі еліпса є повернутими відносно координатних осей залежно від різниці початкових фаз $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Якщо $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$, маємо класичне рівняння еліпса (кола – при $a = b$), півосі якого паралельні координатним осям. Якщо $\Delta\varphi = 0$, маємо пряму лінію $y = \frac{b}{a}x$ з кутом нахилу $\alpha = \arctg\left(\frac{b}{a}\right)$ до осі x . Подібним чином можна одержати рівняння гіперболи, параболи тощо. Слід відзначити, що у даному випадку траєкторії, навіть у вигляді прямих, парабол та гіпербол будуть обмеженими, що обумовлюється періодичністю коливань.

У випадку несинхронних коливань, вигляд фігур залежить від співвідношення між частотами, фазами й амплітудами обох коливань. Якщо частоти відносяться як цілі (парні й непарні) числа, то через проміжок часу, рівний найменшому кратному обох періодів коливань, рухома точка знову повертається у вихідне положення – отримуємо складні форми фігур Ліссажу. Приклади фігур Ліссажу подані на рис. 7.2.

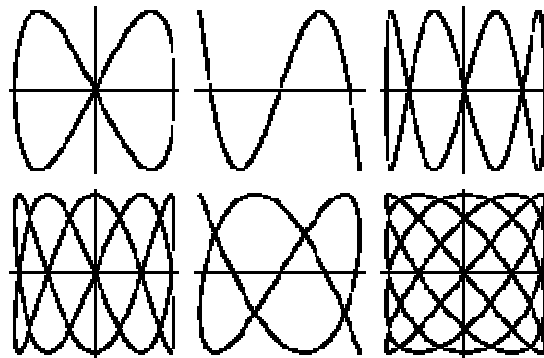


Рисунок 7.2 – Схеми фігур Ліссажу

Фігури Ліссажу вписуються у прямокутник, центр якого збігається з початком координат, сторони паралельні осям координат і віддалені від них на відстанях, рівних амплітудам коливань (див. рис. 7.2). Число перетинів фігури з осями x та y буде дорівнювати цілим зна-

ченням – n_2 і n_1 відповідно. На рис. 7.2 схеми фігур (зліва направо) відповідають таким відношенням $n_2 : n_1 = 2:1 = 2; 3:1 = 3; 4:1 = 4; \dots$. Слід зауважити, якщо відношення є рівним непарному числу, то криві будуть незамкненими, але рухома точка буде повертатися в точку перетину координатних осей, звідки рух починається.

Комп'ютерне моделювання кінематики точки

Для здійснення комп'ютерного моделювання кінематики матеріальної точки, яка здійснює одночасно два гармонічних коливання у двох взаємно ортогональних напрямках, скористаємось можливостями ПК КіДиМ.

Текст файлу вихідних даних

```
РАБОТА:=№ 1 - Рух по прямій лінії;
ВЫПОЛНИЛ:= студент Іванов А.А., гр. І-106;
#Декартовий закон руху# X=a*sin(n1*t); Y=b*sin(n2*t+fi);
#Проекції та значення швидкості та прискорення#
VX=X't; VY=Y't; V=sqrt(VX^2+VY^2);
AX=VX't; AY=VY't; A=sqrt(AX^2+AY^2);
# Перехід до натуральних координат #
At=(AX*VX+AY*VY)/V; An=abs(AX*VY-AY*VX)/V;
AN1=sqrt(At^2+An^2);
kr=An/V^2;
J.s=1; P.s=At;
VN=s't; as=s't't; an=VN^2*kr;
AN=sqrt(as^2+an^2);
#Вибір інтервалу часу та початкових умов руху # T=2*pi/n1;
НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ:=t(0.001), s(0), s't(V(0));
КОНЕЧНЫЕ УСЛОВИЯ:=t(T);
ПОКАЗАТЬ:=Y(X), VY(VX), AY(AX), s;
СРАВНИТЬ:=r(kr,X,Y), r1(VX,VY), r2(AX,AY,an,An),
r3(AX,AY,as,At), r4(A,AN1,AN), r5(V,VN);
a=1; b=1; n1=1; n2=1; fi=0;
#a=1; b=1; n1=1; n2=1; fi=-pi;#
РАСЧЕТ:=ПЕЧАТЬ УРАВНЕНИЙ;

РАБОТА:=№ 1.2 - Рух по колу, еліпсу та гіперболі ;
#a=1; b=1; n1=1; n2=1; fi=pi/2;#
```

```

#a=1; b=0.5; n1=1; n2=1; fi=pi/4;#
a=0.5; b=1; n1=1; n2=1; fi=3*pi/4;
#a=1; b=1; n1=1; n2=2; fi=pi/2;#
#a=1; b=-1; n1=1; n2=2; fi=pi/2;#
РАСЧЕТ:=ПЕЧАТЬ УРАВНЕНИЙ;
РАБОТА:=№ 1.3 - Рух по незамкненим фігурам Лісажу;
a=1; b=1; n1=1; n2=3; fi=0;
#a=1; b=1; n1=3; n2=1; fi=0;#
#a=1; b=1; n1=3; n2=5; fi=0;#
РАСЧЕТ:=ПЕЧАТЬ УРАВНЕНИЙ;
РАБОТА:=№ 1.4 -Рух по замкненим фігурам Лісажу;
a=1; b=1; n1=1; n2=2; fi=0;
#a=1; b=1; n1=1; n2=4; fi=0;#
#a=1; b=1; n1=2; n2=5; fi=0;#
#a=1; b=1; n1=4; n2=5; fi=0;#
РАСЧЕТ:=ПЕЧАТЬ УРАВНЕНИЙ;
КОНЕЦ;

```

Прийняті у тексті файлу позначення можуть бути розшифровані таким чином: **V** – швидкість руху точки; **A** – прискорення руху точки; **At**, **An** – дотичне та нормальне прискорення; **AN1** – прискорення руху точки, яке визначається через прискорення – **At**, **An**; **kr** – кривина траєкторії; **s** – дугова (натуральна) координата; **VN**, **as**, **an**, **AN** – швидкість, дотичне, нормальне та повне прискорення руху точки. Усі вони визначаються за формулами (3.1)–(3.8).

7.2. Робота 2. Дослідження руху точки при моделюванні профілювання коліс зубчастих передач

Мета роботи – вивчення закономірностей руху точки, яка розташована на колі, що котиться без ковзання по нерухомому напрямному колу.

Об'єкт досліджень – рух точки, яка розташована на колі радіусу r , що котиться без ковзання по нерухомому напрямному колу радіусу R .

Предмет досліджень – траєкторії, вектори та годографи швидкості й прискорення при русі точки, яка розташована на колі, що котиться без ковзання по нерухомому напрямному колу.

Методи досліджень містять аналітичне та комп'ютерне моделювання.

Завдання

1. Дослідити закономірності руху точки, яка розташована на колі радіуса r , що котиться без ковзання по напрямному колу радіуса R (при зовнішньому та внутрішньому контакті).

2. За варіюванням геометричних параметрів кіл та відстані точки від центра нерухомого кола встановити якісні й кількісні зміни виду її траєкторії, швидкості й прискорення.

Теоретичний матеріал

Зубчаста передача – це механізм із замкненою системою зубів. Деякі форми зубчастих кіл і зубів в евольвентних зубчастих передачах з парою зубчастих кіл наведено на рисунку 7.3. Розглянемо основні типи зубчастих передач.

Багатоступінчасті зубчасті передачі поєднують більш ніж пару зубчастих кіл в різних типах з'єднання.

Планетарні зубчасті передачі містять зубчасті колеса з геометричними осями, що переміщаються. Ці зубчасті колеса, названі планетарними, або сателітами, рухаються подібно до планет Сонячної системи, від чого і отримали свою назву. Зубчасті колеса, з якими зчіплюються сателіти, називаються центральними. Осі сателітів закріплюються в ланці передачі, яка називається *водило*, яке, так само як і центральне колесо, обертається довкола центральної, або основної, геометричної осі передачі.

Хвильові передачі, в яких одне із зубчастих кіл є гнучким вінцем.

Відомо, що залежно від взаємного розташування валів, форми зубчастих кіл і форми зубів бувають: *циліндричні* – прямозубі, косо-

зубі і шевронні; *конічні* – прямозубі, з тангенціальними зубами або косозубі і з круговими зубами; *гвинтові* – такі, що складаються з двох циліндричних косозубих коліс, встановлених на валах, що перехрещуються; *гепоїдні*, або *конічні гвинтові* – такі, що складаються з двох конічних косозубих або з криволінійними зубами коліс, які встановлені на валах, що перехрещуються. Кут між геометричними осями валів конічних і гвинтових передач може бути в межах $0...180^\circ$, але зазвичай цей кут рівний 90° . Евольвенті зубчасті передачі, для яких кут схрещування валів є рівним 90° , названо гепоїдними.

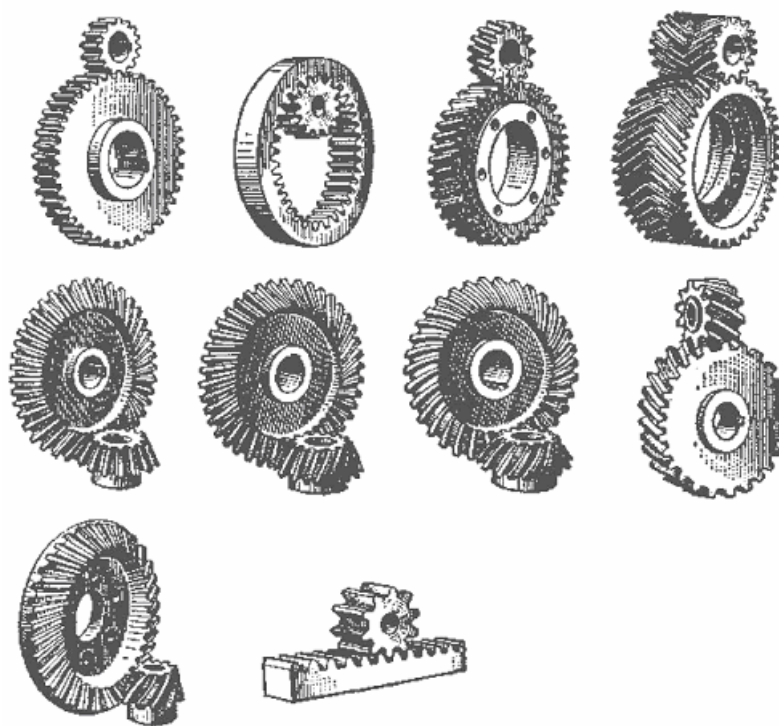


Рисунок 7.3 – Евольвенті зубчасті передачі

Профілювання зубчастих коліс – це побудова профілів зубів на колесах зубчастих передач, що здійснюється шляхом нарізування інструментальною рейкою. У поширених зубчастих передачах Новікова з опуклим профілем зубів одного зубчастого колеса й увігнутим профілем зубів іншого – одна лінія зачеплення (контакт зв'язаних зубів відбувається теоретично в одній точці), а в передачах з опукло-увігнутим профілем зубів шестерні і колеса – дві лінії зачеплення. Передачі Новікова з двома лініями зачеплення мають велику контактну міцність, крім того, зуби шестерні і колеса в цьому випадку можна нарізати одним і тим же інструментом.

При ведучому зубчастому колесі з опуклим профілем зубів лінія зачеплення розташована паралельно полюсній лінії і осям обертання зубчастих коліс за полюсом зачеплення за напрямом обертання ведучого зубчастого колеса. Така передача називається заповлюсною. При ведучому зубчастому колесі з увігнутим профілем зубів лінія зачеплення розташовується до полюса зачеплення за напрямом обертання ведучого зубчастого колеса. Така передача називається доповлюсною. У передачі з двома лініями зачеплення одна лінія зачеплення розташовується до, а друга – поза полюсом. Ця передача називається дозаповлюсною. При ведучій шестерні заповлюсна передача значно більш технологічна, ніж доповлюсна (діаметр і маса колеса менші, при необхідності можна збільшити діаметр вала шестерні), тому з передач Новікова з однією лінією зачеплення вона найбільш поширена.

Циліндричні та конічні прямозубі передачі працюють зазвичай при невеликих та середніх (3...15 м/с) швидкостях. Циліндричні прямозубі передачі використовують при осьовому переміщенні зубчастих коліс для перемикання швидкостей (коробки передач). Циліндричні та конічні косозубі, із круговими зубами передачі застосовують у відповідальних випадках при середніх та високих (>15 м/с) швидкостях.

Аналітичне моделювання

Розглянемо рух точки P , розташованої на відстані h від центра кола радіуса r , що котиться без ковзання по напрямному колу радіуса R з кутовою швидкістю ω , як показано на схемах рис. 7.4. Параметричні рівняння руху в декартових координатах можна записати так:

$$\begin{aligned}x &= (R + mkR) \cos(k\varphi) - mh \cos(\varphi(1 + mk)), \\y &= (R + mkR) \sin(k\varphi) - h \sin(\varphi(1 + mk)), \\ \varphi &= \omega t,\end{aligned}\tag{7.1}$$

де R – радіус нерухомого кола; r – радіус кола, що котиться; h – відстань точки від центру кола, що котиться; $k = r/R$, $m = 1$ при зовнішньому та $m = -1$ при внутрішньому торканні.

Циклоїда – траєкторія точки A , яка розташована на кругу, що котиться без ковзання по прямій (рис. 7.5). Параметричні рівняння закону руху в декартових координатах можна записати так:

$$x = \varphi r - r \sin \varphi; \quad y = r - r \cos \varphi; \quad \varphi = \omega t, \quad (7.2)$$

де r – радіус круга, що котиться без ковзання по напрямній прямій (рейці).

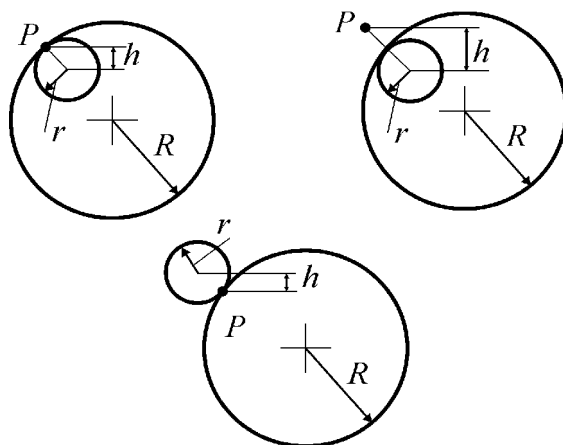


Рисунок 7.4 – Розрахункова модель

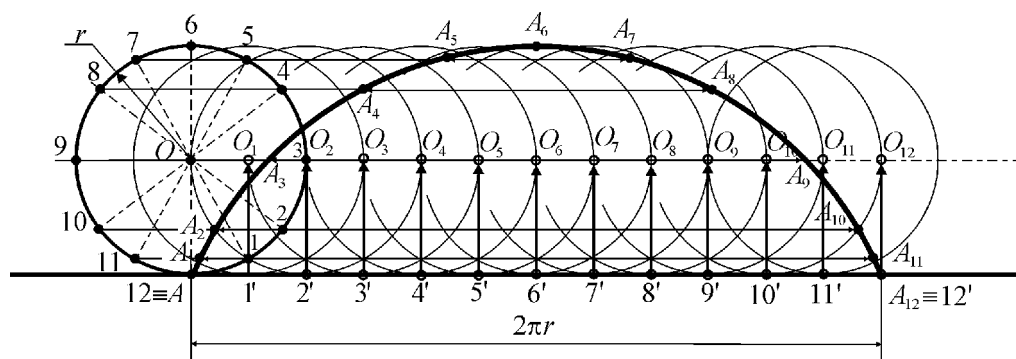


Рисунок 7.5 – Циклоїда

Епітрохоїда (від грецької – «на та коло») – плоска крива траєкторії точки, що утворюється точкою, жорстко зв'язаною з кругом, який котиться по іншому кругу.

При зовнішньому контакті коліс ($m = 1$), якщо $h = r$, то епітрохоїда утворює **епіциклоїду**, також при $h > r$, отриману фігуру називають подовженою епіциклоїдою, а при $h < r$ – укороченою епіциклоїдою. Власні імена отримали окремі варіанти епітрохоїд: $h = r = R$ – **кардіоїда** (від грецького – «на вигляд серця») – плоска лінія, яка описується

фіксованою точкою круга, що котиться по нерухомому кругу з таким же радіусом, отримала свою назву за схожість своїх контурів із стилізованим зображенням серця, $h > r = R$ ($m = 1$) – **равлик Паскаля** та, якщо $h = R + r$ ($m = 1$) – **роза**.

Епіциклоїда (від грецької – «над та коло») – траєкторія точки P , що розташована на кругу радіусу $r = a$, що котиться без ковзання по напрямному кругу радіусу $R = b$ (контакт зовнішній).

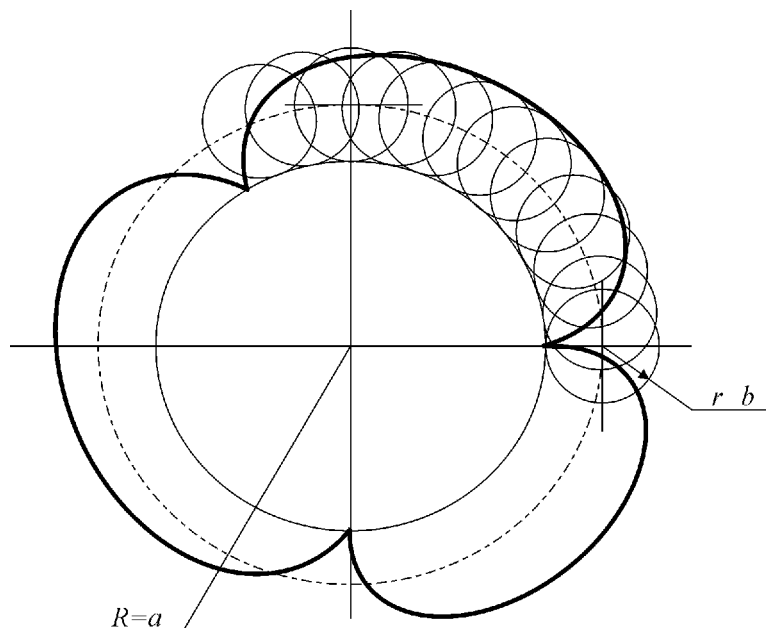


Рисунок 7.6 – Побудова епіциклоїди

На рисунках 7.6, 7.7, 7.8 показано нерухомий круг радіусу $R = a$, та криві (епіциклоїди), що окреслюються рухомою точкою, яка розташована на рухомому кругу радіусу $r = b$.

При внутрішньому контакті коліс ($m = -1$), якщо $h = r$, то епітрохіда утворює **гіпоциклоїду**.

Гіпоциклоїда (від грецьких слів «під і коло») – плоска крива, що утворюється точкою круга, який котиться усередині іншого круга без ковзання (внутрішнє торкання). На рисунках 7.9, 7.10 і 7.11 зображено нерухомий круг радіусу $R = a$, та криві, що окреслюються рухомою точкою, яка розташована на рухомому колесі радіусу $r = b$.

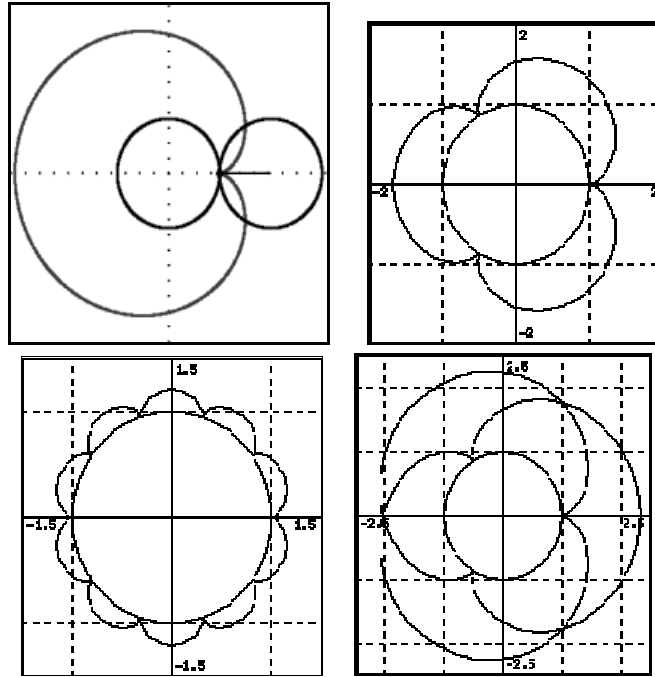


Рисунок 7.7 – Епіциклоїди ($h = r$): $k = 1$, $k = 1/3$, $k = 1/10$, $k = 2/3$

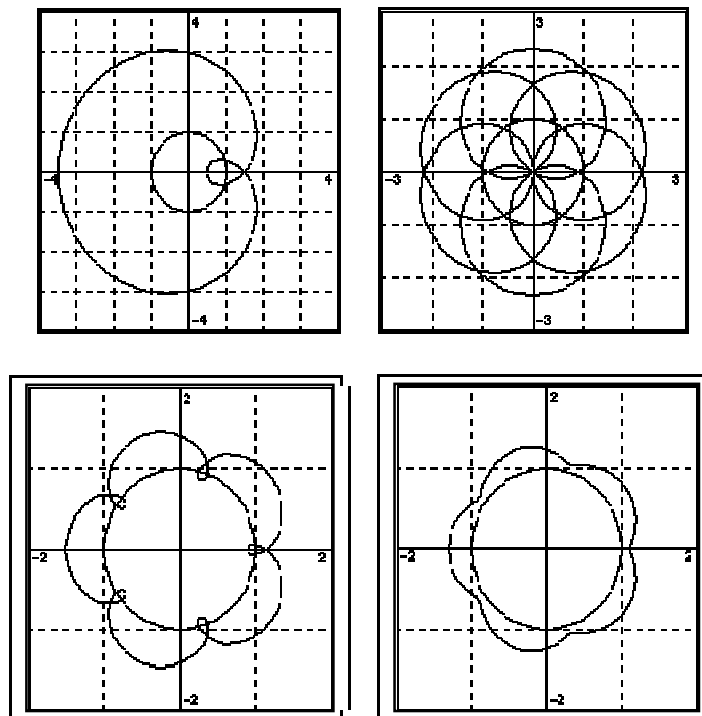


Рисунок 7.8 – Епіциклоїди: 1 – $k = 1$, $h = 1,5 r$; 2 – $k = 1/6$, $h = R + r$; 3 – $k = 1/5$, $h = 1,5 r$; 4 – $k = 2/3$, $h = 0,5 r$

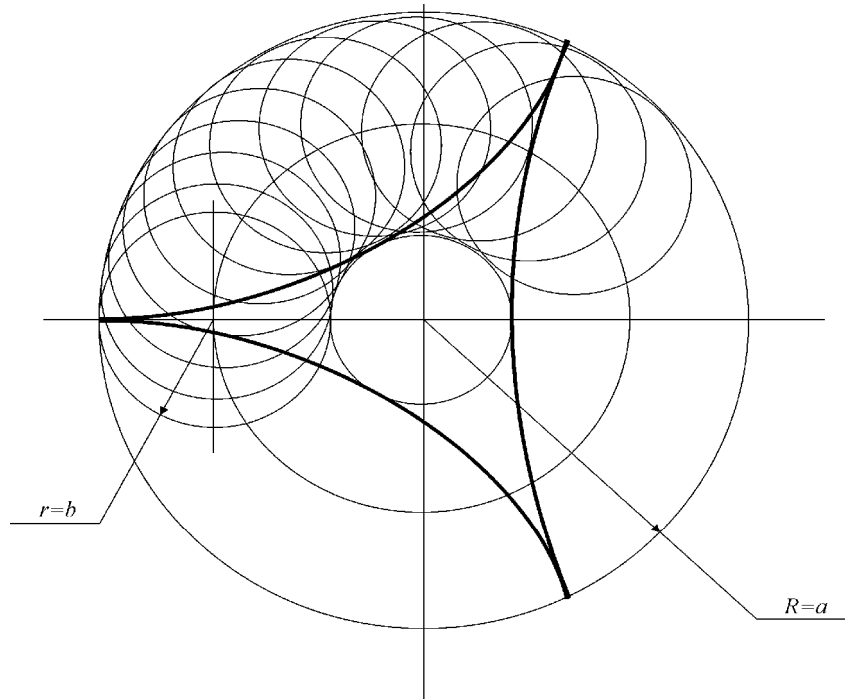


Рисунок 7.9 – Побудова гіпоциклоїди

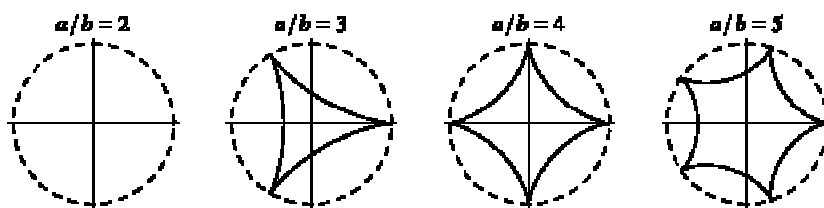


Рисунок 7.10 – Гіпоциклоїди: $k = 1/2$; $k = 1/3$; $k = 1/4$; $k = 1/5$

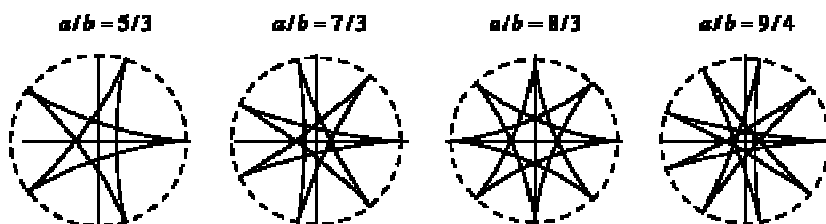


Рисунок 7.11 – Гіпоциклоїди: $k = 3/5$; $k = 3/7$; $k = 3/8$; $k = 4/9$

Зауважимо, якщо k є раціональним значенням, то криві траєкторій замкнені на себе в колу радіуса R , а якщо ірраціональні, то криві незамкнені на себе.

Комп'ютерне моделювання

Здійснимо комп'ютерне моделювання для дослідження руху точ-

ки колеса, що котиться без ковзання по напрямному колесу, при внутрішньому і зовнішньому контакті коліс, як показано на рис. 7.4, та при контакті колеса із рейкою, як показано на рис. 7.5.

З метою моделювання об'єднаємо математичні рівняння (7.1) та (7.2), з яких перше – описує рух точки колеса, що котиться без ковзання по напрямному колесу при внутрішньому і зовнішньому контакті коліс, а друге – описує рух колеса вздовж рейки.

Далі введемо параметр – rey зі значеннями: $rey = 1$, коли розглядаються рівняння (7.2), та $rey = 0$, коли розглядаються рівняння (7.1). Тоді узагальнений закон руху точки колеса, що рухається без ковзання по напрямним – по колесу чи по прямій рейці, в декартових координатах можна записати так:

$$\begin{aligned}x &= rey[\varphi r - r \sin \varphi] + (1 - rey)[(R + mkR) \cos(k\varphi) - mh \cos(\varphi(1 + mk))]; \\y &= rey[r - r \cos \varphi] + (1 - rey)[(R + mkR) \sin(k\varphi) - h \sin(\varphi(1 + mk))]; \\ \varphi &= \omega t,\end{aligned}$$

де всі параметри були визначені раніше.

При комп'ютерному моделюванні визначимо для точки рухомого колеса кінематичні характеристики: траєкторії, вектори та годографи швидкості й прискорення при русі точки по траєкторіях, що відповідають епіциклоїді, гіпоциклоїді та циклоїді.

При моделюванні також розглянемо завдання до профілювання коліс у випадку зовнішнього і внутрішнього торкання та до профілювання інструментальної рейки для нарізання зубчастих коліс.

Далі подано текст файлу вихідних даних для ПК КіДиМ, за допомогою якого можна моделювати різні випадки взаємодії рухомих та нерухомих коліс та рейок й досліджувати закономірності у змінах основних кінематичних характеристик.

Текст файлу	Коментар
РАБОТА:= РАБОТА №2 ;	Назва роботи та виконавець
ВЫПОЛНИЛ:= Іванов С.С. , И-166 ;	(обов'язково).
#Декартовий закон руху #	Узагальнений закон руху: $m =$
X=rey*(fi*r-r*sin(fi))+(1-rey)*	$= 1$ – зовнішнє й $m = -1$ –
((R+m*k*R)*cos(fi*k) -	внутрішнє зчеплення, h – від-

```

m*h*cos(fi*(1+m*k)));
Y=re*y*(r-r*cos(fi))+
(1-re*y)*((R+m*k*R)*sin(fi*k)-
h*sin(fi*(1+m*k)));
re*y=0; fi=w*t; w=1/r; k=r/R; R=1;
T=2*pi/k; H=sqrt(X^2+Y^2);
#Проекції та значення швидкості та
прискорення#
VX = X't; VY = Y't; V=
sqrt(VX^2+VY^2);
AX = VX't; AY = VY't;
A = sqrt(AX^2+AY^2);

#1 - Зовнішній контакт коліс: #
#Кардіоїда# m=1; h=r; r=1*R;

#Епіциклоїди: h=r #
#r=1/3*R;# # r=1/pi*R;#
#r=1/5*R;#
#Ірраціональні значення k #
#r=1/(1.2*pi)*R;# #r=1/10*R;#
#< Равлик Паскалю: r=R, R < h < R+r
>#
#r=R; h=1.5*R;#
#< Подовжена епіциклоїда: h>r >#
#r=1/3*R; h=r+0.5*r;#
#r=1/5*R; h=r+0.5*r;#
#< Вкорочена епіциклоїда: h<r >#
#r=1/3*R; h=r-0.15*r;#
#r=1/5*R; h=r-0.15*r;#
#r=1/5*R; h=r-0.5*r;#

#Роза:h=R+r# #r=1/6*R; h=R+r;#

#2 - Внутрішній контакт коліс: m=-
1#
# Гіпоциклоїда: h=r #
# m=-1; h=r; r=1/3*R; #
#Астроїда# #r=1/4*R;# #r=1/5*R;#
#r=3/7*R;# #r=3/5*R;#
#Ірраціональні значення k#
# r=1/7.2*R;#

```

стань точки від центра колеса, що котиться з кутовою швидкістю w ; T – тривалість руху, H – модуль радіус-вектора точки.

Розрахункові дані швидкості й прискорення точки

Завдання для досліджень:

Кардіоїда: 1 – контакт зовнішній.

Епіциклоїди: варіювання радіусами коліс (рухоме колесо зменшується).

Равлик Паскалю.

Подовжена епіциклоїда
($h = 1.5 r$).

Вкорочена епіциклоїда
($h = 0.85r, h = 0.5r$).

Роза із 6-ма пелюстками
($h = R + r$).

Гіпоциклоїди: варіювання радіусами коліс (рухоме колесо зменшується).

Астроїди: варіювання радіусами коліс (рухоме колесо зменшується й збільшується).

#r=1/(1.2*pi)*R;#

#3 - Профілювання рейки #

#rey=1;r=1;T=8*pi*R/(w*r);#

ВАРЬИРОВАТЬ:=t,0,T;

ПОКАЗАТЬ:=Y(X),VY(VX),AY(AX),H;

СРАВНИТЬ:=r1(H,X,Y),r2(V,VX,VY),
r3(A,AX,AY);

РАСЧЕТ:=КИНЕМАТИКА;

КОНЕЦ;

Завдання для досліджень: 3 –
профілювання рейки

Інструкції до розрахунків
(обов'язково): варіювати ча-
сом $t \in [0, T]$ та показати ре-
зультати у формі графіків.

7.3. Робота 3. Дослідження плоского руху маніпулятора із захватом деталей з нахилоного лотка

Мета роботи – вивчення закономірностей плоского руху маніпулятора з захватом деталей з нахилоного лотка.

Об'єкт досліджень – маніпулятор, заданий в початковому (пунктир) положенні на рис. 7.12, який повинен забезпечити із заданою відносною точністю δ прийом деталі D , що рухається зі швидкістю V_D вздовж лотка, нахилоного під кутом α до горизонту, та розташований над маніпулятором на відстані d від затискача, як показано на рис. 7.12. Маніпулятор має такі ланки: кривошипно-шатунний механізм OAB , колесо, з центром B , що котиться без ковзання по опорі, вертикальну «руку», на якій розміщено затискач для прийому деталі на відстані H від опори⁴.

Предмет досліджень – визначення тривалості часу руху маніпулятора до захвату деталі, траєкторії, вектори швидкості й прискорення точок A, B, C, M тіл й ланок маніпулятора при плоскому русі.

Методи досліджень містять: аналітичне та комп'ютерне моделювання.

⁴ На рис. 7.12 зображена схема механізму, на якій не показано, за рахунок чого «рука» зберігає вертикальне положення під час руху. Це можна забезпечити, якщо, наприклад, замість показаного на рисунку одного колеса B має місце візок з двох або чотирьох коліс, геометричні та кінематичні характеристики яких ідентичні характеристикам колеса B . На рамі візка «рука» закріплена жорстко.

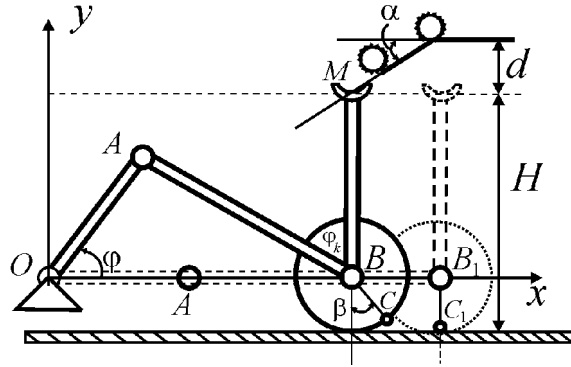


Рисунок 7.12 – Розрахункова схема маніпулятора

Завдання

1. Скласти рівняння декартового закону руху тіл й точок маніпулятора.
2. За варіюванням швидкості руху деталі та геометричних параметрів ланок механізму встановити якісні й кількісні зміни вигляду траєкторії, швидкості та прискорення тіл і точок механізму та тривалості часу руху маніпулятора до захвату деталі.

Аналітичне моделювання

Для аналітичного моделювання руху ланок й точок маніпулятора (рис. 7.12) прийнемо довжини ланок маніпулятора: кривошипа – $OA = r$, шатуна – $AB = 2r$, руки – $BM = H - R$, радіус колеса – R . У будь-який час приймаємо, що кут, який утворює кривошип з горизонталлю є $\varphi(t) = \omega t$, $\omega = 2\pi n$, де ω, n – кутова швидкість й число обертів кривошипа ($n = 1$ об/с – повний цикл). Кутові швидкість та прискорення кривошипа визначаються так: $\omega(t) = \dot{\varphi}$, $\varepsilon = \ddot{\varphi}$.

Кут обертання, кутові швидкість та прискорення колеса – $\varphi_k(t) = 3/2\pi + \beta$, $\beta = s(t)/R$, де $s = r + AB - X_B$ – путь, яку долає центр колеса. Складемо кінематичні рівняння руху ланок маніпулятора:

♦ кривошипа:

$$X_A = r \cdot \cos \varphi; \quad Y_A = r \cdot \sin \varphi; \quad (7.3)$$

♦ точки B – центра колеса:

$$X_B = X_A + \sqrt{AB^2 - Y_A^2}; \quad Y_B = 0; \quad (7.4)$$

◆ точки C колеса:

$$X_C = X_B + R \cdot \sin \beta; \quad Y_C = Y_B - R \cdot \cos \beta. \quad (7.5)$$

Рух точки C колеса, що котиться без ковзання по опорі, відносно опори можна описати також рівняннями циклоїди:

$$x_C = \beta R - R \cdot \sin \beta; \quad y_C = R - R \cdot \cos \beta,$$

де x_C, y_C – декартові координати точки C в осях, що вибрані в точці C_1 , звідки починається рух цієї точки, та позитивний напрям осі Ox – співпадає з напрямом руху точки C_1 вздовж опори, а осі Oy – вгору по нормалі до опори:

◆ точки захвата M :

$$X_M = X_B; \quad Y_M = H; \quad (7.6)$$

◆ деталі D вздовж лотка:

$$X_D = r + AB - V_D \cdot t \cdot \cos \alpha; \quad Y_D = H + d - V_D \cdot t \cdot \sin \alpha. \quad (7.7)$$

Тривалість руху до захвату деталі слід встановлювати по виконанню, з заданою відносною точністю δ , умов прийому деталі D :

◆ точки D та M співпадуть, так що:

$$X_M = X_D(1 \pm \delta); \quad Y_M = Y_D; \quad (7.8)$$

◆ ширину затискача $2h$ вибирають за нерівністю:

$$h \geq \delta \cdot X_D. \quad (7.9)$$

За варіюванням швидкості руху деталі та геометричних параметрів ланок механізму за рівняннями (7.3–7.6) можна встановити якісні та кількісні зміни вигляду траєкторії, швидкості й прискорення тіл і точок механізму, та з (7.8–7.10) – тривалість часу руху маніпулятора до захвату деталі.

Комп'ютерне моделювання

При комп'ютерному моделюванні за варіюванням швидкості руху деталі V_D вздовж лотка, та кута нахилу лотка α , при різних значеннях радіуса колеса R встановимо якісні й кількісні зміни вигляду траєкторії, швидкості й прискорення точок A, B, C, M тіл й ланок маніпулятора при плоскому русі механізму та тривалості часу руху маніпулятора до захвату деталі. Далі наводиться текст файлу вихідних даних для ПК КіДиМ.

Текст файлу	Коментар
<pre>РАБОТА:= № 3; ВЫПОЛНИЛ:= Іванов С.С., И-16а; #Рух кривошипно-шатунної ланки # XA=r*cos(fi); YA=r*sin(fi); XB=XA+sqrt(AB^2-YA^2); YB=0; #Рух колеса# XC=XB+R*sin(bt); YC=-R*cos(bt); bt=s/R; s=r+AB-XB; #Відносний рух колеса# xB=bt*R-R*sin(bt); yB=R-R*cos(bt); #Рух захвату та деталі# XM=XB; YM=H; XD=(r+AB)-VD*t*cos(alf); YD=H+d-VD*t*sin(alf); dt=0.001; # Параметри маніпулятора # r=0.2; AB=2*r; H=2.2*r; d=(1+dt)*0.5*H; fi=w*t; w=VD/r; T=2*pi/w; #Визначення швидкостей та прискорень # VMX=XM' t; VMY=YM' t; VM=sqrt(VMX^2+VMY^2); AMX=VMX' t; AMY=VMY' t; aM=sqrt(AMX^2+AMY^2); VAX=XA' t; VAY=YA' t; VA=sqrt(VAX^2+VAY^2); AAX=VAX' t; AAY=VAY' t;</pre>	<p>Назва роботи та виконавець (обов'язково).</p> <p>Декартові закони руху точок A, B, C, M тіл і ланок маніпулятора: кривошипа – $OA = r$, шатуна – $AB = 2r$, радіус колеса – R.</p> <p>Абсолютний й відносний декартові закони руху без ковзання колеса по опорі.</p> <p>Декартові закони руху точки M руки маніпулятора – $BM = H-R$, деталі D, що починає рухатися зі швидкістю V_D по нахиленому під кутом α до горизонту лотку, який розташовано на відстані d від затискача.</p> <p>Параметри ланок маніпулятора, dt – відносна точність позиції захвата, T – час повного обороту кривошипа.</p> <p>Розрахункові дані швидкості та прискорення точок M, A, B, C ланок маніпулятора та амплітудних значень координат точок ланок маніпулятора.</p>

```

aA=sqrt(AAX^2+AAAY^2);
VBX=XB't; VB=abs(VBX);
ABX=VBX't; ABY=VBY't;
aB=sqrt(ABX^2+ABY^2);
VCX=XC't; VCY=YC't;
VC=sqrt(VCX^2+VCY^2);
ACX=VCX't; ACY=VCY't;
aC=sqrt(ACX^2+ACY^2);
wAB=VAY/(XB-XA); fik=3/2*pi+bt;
wk=fik't; eps=w't; epsk=wk't;
epsAB=abs(ABY-AAAY)/AB;
#Обчислення відстань точок#
HC=sqrt(XC^2+YC^2);
HB=sqrt(XB^2+YB^2);
HM=sqrt(XM^2+YM^2);
HA=sqrt(XA^2+YA^2);
#1 - Рух манипулятора #
alf=0; VD=1; R=(r+AB)/(12*pi);
#2 - Захват деталі#
#Вибір місця прийому деталі та
нахилу лотка#
#XMZ=(r+AB); alf=arctg(d/XMZ);#
#XMZ=(r+AB)/2;#
#XMZ=(r+AB)/1.8;#
#3 - Варіювання параметрами кри-
вошипа#
#r=2*0.2; AB=3*r;
XMZ=(r+AB)/3.1;#
#r=2*0.2; AB=5*r;
XMZ=(r+AB)/5.99;#
#4 - Варіювання радіуса колеса#
#R=(r+AB)/(9*pi);#
#R=(r+AB)/(6*pi);#
#R=(r+AB)/(3*pi);#
#5 - Варіювання швидкості деталі
#
#VD=10; R=(r+AB)/(6*pi);#
#VD=1;# #VD=0.01;#
# Інструкції до розрахунків #
ВАРЬИРОВАТЬ:=t,0,T;

```

Завдання для досліджень:

- 1 – рух манипулятора без прийому деталі – $\alpha = 0$;
- 2 – захват деталі – вибір місця прийому деталі й нахилу лотка (поступове уточнення тривалості руху до захвату деталі);
- 3 – варіювання параметрів кривошипа при гарантованому захваті деталі за рахунок вибору місця прийому деталі й нахилу лотка;
- 4 – варіювання радіуса колеса (поступове його зменшення) при гарантованому захваті деталі;
- 5 – варіювання швидкості деталі (поступове її зменшення) при гарантованому захваті деталі.

Інструкції до розрахунків (обов'язково): варіювати час $t \in [0, T]$ та показати результати у формі графіків.

ПОКАЗАТЬ:=ХМЗ,alf,YA(XA),
 VAY(VAX), yB(xB),XM;
 СРАВНИТЬ:= Координати лотка і деталі (YD,YM,XM,XD),
 Координати т.А (HA,HA,YA),
 Координати т.В (HB,HB,YB),
 Координати т.С (HC,HC,YC),
 Швидкості точок (VA,VB,VC,VM),
 Кутові швидкості (w,wAB,wk),
 Кутові прискорення
 (eps,epsAB,epsk);
 РАСЧЕТ:=КИНЕМАТИКА;
 КОНЕЦ;

7.4. Робота 4. Визначення зусиль у вузлах механізму маніпулятора за умов рівноваги під дією плоскої системи сил

Мета роботи – визначення закономірностей у формуванні розподілення реакцій по вузлах ланок маніпулятора за умов його рівноваги під дією плоскої системи сил.

Об'єкт досліджень – маніпулятор, що умовно переведено із своєї початкової (пунктир) конфігурації в деяку проміжну, де знаходиться в рівновазі на час вистою для прийому деталі з нахиленого лотку, під кутом α до горизонту, як показано на рис. 7.13⁵. Вага ланок маніпулятора: 1 – кривошипа OA : $P_1 = m_1 g$; 2 – шатуна AB : $P_2 = m_2 g$; 3 – «руки» BM , на якій розміщено захват для прийому деталі: $P_3 = m_3 g$; та 4 – колеса, з центром B , що контактує без ковзання з опорою в точці C : $P_4 = m_4 g$. Сила \vec{Q} прикладена під кутом нахилу лотка α , в точці D , що знаходиться на відстані $H+R$ від опори як показано на рис. 7.14.

Предмет досліджень – зусилля в вузлах O, A, B, C механізму маніпулятора, які виникають за умов рівноваги під дією плоскої системи сил під час вистою.

Методи досліджень містять аналітичне та комп'ютерне моделювання.

⁵ Див. виноску на стор 222.

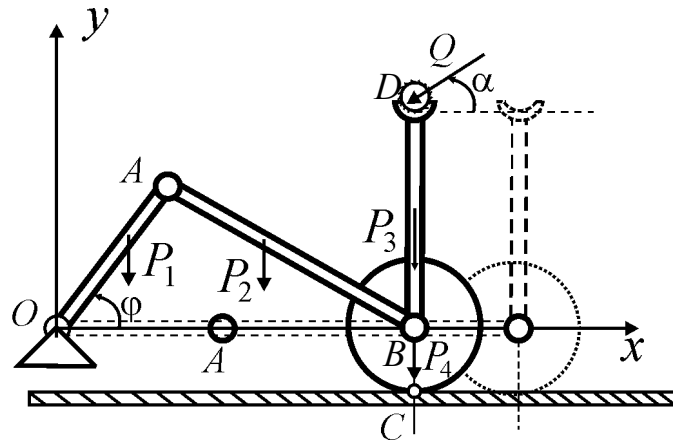


Рисунок 7.13 – Модель маніпулятора із активними силами

Завдання

1. Дослідити закономірності у формуванні розподілення реакцій по вузлах ланок маніпулятора за умов його рівноваги під дією плоскої системи сил, для чого необхідно: побудувати розрахункову схему механічної системи та скласти рівняння рівноваги системи та її ланок.

2. За варіюванням кута φ , кута нахилу лотка α , при різних значеннях r , радіусу колеса R встановити якісні та кількісні зміни в характері розподілення реакцій в'язей між ланками маніпулятора, визначити допоміжні дані щодо стійкості маніпулятора на перекидання, величину сил тертя, граничного моменту кочення і коефіцієнтів тертя ковзання й кочення для рівноваги маніпулятора під дією плоскої системи сил.

Аналітичне моделювання

Для аналітичного моделювання рівноваги маніпулятора за умов дії плоскої системи сил (рис. 7.13), що розглядається в лабораторній роботі, складемо розрахункову схему – рис. 7.14. Положення маніпулятора під час вистою в рівновазі будемо встановлювати значеннями кута, який утворює кривошип з горизонталлю – φ . На схемі показано плоску систему активних сил: утримуючий момент – M , величину якого треба визначити, та відомі вектори сил ваги ланок

маніпулятора – $\vec{P}_1 = m_1 \vec{g}$, $\vec{P}_2 = m_2 \vec{g}$, $\vec{P}_3 = m_3 \vec{g}$, $\vec{P}_4 = m_4 \vec{g}$ та сили \vec{Q} , що прикладена в точці M під кутом нахилу лотка α до горизонту. Геометричні характеристики ланок механізму відомі: розмір кривошипа $OA = r$, шатуна – AB , «руки» $BM = H$, радіус колеса – R .

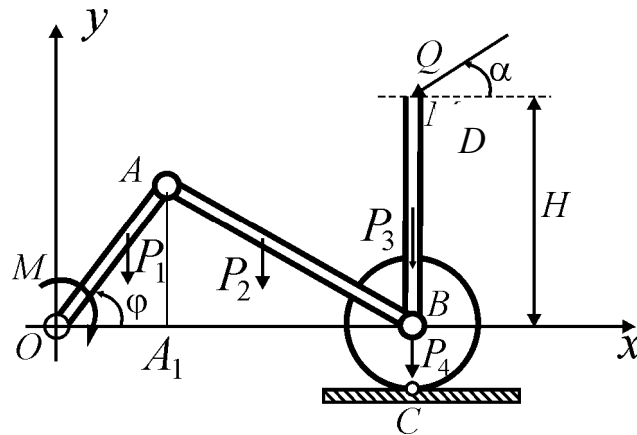


Рисунок 7.14 – Розрахункова схема

Далі розглянемо схему, відкинувши опори – циліндричний шарнир O та гладку поверхню під колесом із заміною їх дій складовими \vec{X}_O, \vec{Y}_O реакції шарнира O та нормальною реакцією \vec{N} в точці C колеса, як показано на рис. 7.15.

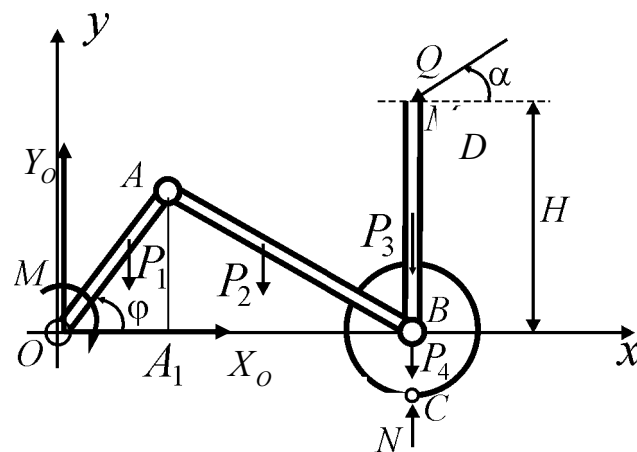


Рисунок 7.15 – Розрахункова схема із реакціями у точках O та C

Схема на рис. 7.15 має 4 невідомих. Але вона є статично визначеною, так як, після розглядання рівноваги частин конструкції, що утворюються в результаті розрізання її по шарниру A , у нас буде 6 невідомих (X_O, Y_O, X_A, Y_A, M, N), для яких можна скласти 6 рівнянь рівноваги (по 3 на кожну частину). Розглянемо це на рис. 7.16.

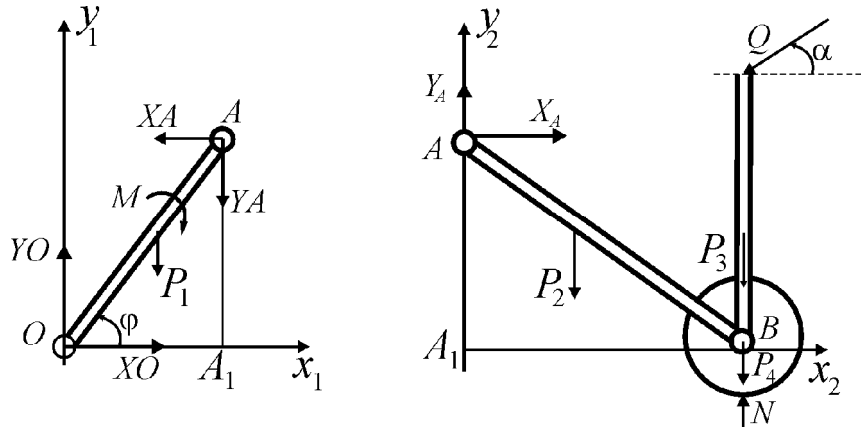


Рисунок 7.16 – Розрахункові схеми для визначення внутрішніх реакцій у вузлі A , зовнішніх реакцій в точках O та C та врівноважуючого моменту M

На цих розрахункових схемах наведено проекції реакцій у вузлах кривошипа OA , відповідні шарніру в точці O – X_O , Y_O та шарніру в точці A – X_A , Y_A , а при розгляді шатуна AB відповідні шарніру в точці A – X_A , Y_A та гладкій поверхні в точці C – N .

Складемо рівняння рівноваги:

♦ для лівої частини:

$$\begin{aligned} X_O - X_A &= 0; & Y_O - Y_A - P_1 &= 0, \\ -M - Y_A \cdot OA_1 + X_A \cdot A_1A - P_1 \cdot \frac{OA_1}{2} &= 0; \end{aligned}$$

♦ для правої частини:

$$\begin{aligned} X_A - Q \cos \alpha &= 0; & Y_A + N - P_2 - P_3 - P_4 - Q \sin \alpha &= 0; \\ (N - P_3 - P_4 - Q \sin \alpha) \cdot A_1B - P_2 \cdot \frac{A_1B}{2} + Q \cos \alpha (H - A_1A) &= 0, \end{aligned}$$

де

$$OA_1 = r \cos(\varphi); A_1A = r \sin(\varphi); A_1B = \sqrt{AB^2 - A_1A^2}.$$

Розв'язок наведеної системи дозволяє визначити невідомі сили та моменти і дослідити закономірності їхнього розподілу:

$$\begin{aligned} X_O = X_A &= Q \cos \alpha; Y_A = \frac{P_2}{2} + Q \cos \alpha \frac{H - A_1A}{A_1B}; \\ N &= Q \left(\sin \alpha - \cos \alpha \frac{H - A_1A}{A_1B} \right) + \frac{P_2}{2} + P_3 + P_4; \end{aligned}$$

$$Y_o = P_1 + \frac{P_2}{2} + Q \cos \alpha \frac{H - A_1 A}{A_1 B};$$

$$M = Q \cos \alpha \cdot \frac{H \cdot OA_1 + A_1 A (A_1 B - OA_1)}{A_1 B} - \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot OA_1.$$

Координати центра ваги маніпулятора визначимо так:

$$x_{CT} = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^n x_{Ci} P_i; \quad y_{CT} = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^n y_{Ci} P_i,$$

де

$$P = \sum_{i=1}^4 P_i = m_1 g + m_2 g + m_3 g + m_4 g;$$

$$x_{C1} = \frac{1}{2} OA_1, \quad x_{C2} = OA_1 + \frac{1}{2} A_1 B, \quad x_{C4} = x_{C3} = OB = OA_1 + A_1 B;$$

$$y_{C1} = \frac{1}{2} A_1 A, \quad y_{C2} = y_{C1}, \quad y_{C3} = \frac{H}{2}, \quad y_{C4} = 0.$$

Далі розглянемо стійкість на перекидання відносно шарніра A . Для цього визначимо момент перекидаючий та момент утримуючий. З рис. 7.16 отримаємо:

$$M_{\text{пер}} = Q \cos \alpha (H - A_1 A); \quad M_{\text{утр}} = \left(Q \sin \alpha + \frac{P_2}{2} + P_3 + P_4 \right) A_1 B. \quad (7.11)$$

За цими даними можна визначити коефіцієнт стійкості на перекидання:

$$k = M_{\text{пер}} / M_{\text{утр}}.$$

Умови для перекидання конструкції навколо шарніру A можна отримати, якщо прирівняти момент перекидаючий та момент утримуючий з формул (7.10), або якщо прирівняти нулю реакцію площини N в точці C (7.10). В обох випадках отримаємо умову для визначення величини сили Q :

$$Q = \frac{(0,5P_2 + P_3 + P_4) A_1 B}{(H - A_1 A) \cos \alpha - A_1 B \sin \alpha}.$$

Звідси видно, що перекидання взагалі неможливе, якщо:

$$\alpha > \arctg\left(\frac{H - A_1 A}{A_1 B}\right).$$

Комп'ютерне моделювання

При комп'ютерному моделюванні визначимо закономірності у формуванні розподілу реакцій по вузлах ланок маніпулятора за умов його рівноваги під дією плоскої системи сил.

За варіюванням кута φ , кута нахилу лотка α , при різних значеннях r , радіуса колеса R встановимо якісні й кількісні зміни в характері розподілу реакцій в'язей між ланками маніпулятора, визначимо допоміжні дані щодо стійкості маніпулятора на перекидання, рівні сил тертя, граничного моменту кочення і коефіцієнтів тертя ковзання й кочення для рівноваги маніпулятора під дією плоскої системи сил.

Для варіювання параметрами маніпулятора розглянемо границі зміни кута α : $[0; \pi]$.

У розрахунках приймемо вихідні довжини (м) ланок маніпулятора: $OA = r$, $r = 0,5$; $AB = 3r$; $R = 0,25r$; $H = 2AB$.

Силові параметри ланок маніпулятора: $Q = 20$ (Н); $m_1 = 5$ (кг); $m_2 = m_1$; $m_3 = 2m_1$; $m_4 = 4m_1$. Далі розглянемо текст файлу вихідних даних для ПК КіДиМ.

Текст файлу

```
РАБОТА := №4;
ВЫПОЛНИЛ := Іванов С.С., І-16а;
#Змінна геометрія ланок маніпулятора#
OA1 = r*cos(fi); A1A = r*sin(fi);
A1B = sqrt(AB^2-r^2*sin(fi));
OB=OA1+A1B;
#Координати центрів ваги#
P1=m1*g; P2=m2*g; P3=m3*g; P4=m4*g;
P=P1+P2+P3+P4;
xC1=OA1/2; yC1=A1A/2;
xC2=OA1+A1B/2; yC2=yC1;
xC3=OB; yC3=H/2; xC4=xC3; yC4=0;
xC=(xC1*P1+xC2*P2+xC3*P3+xC4*P4)/P;
```

Коментар

Назва роботи та виконавець (обов'язково).

Визначення геометричних розмірів ланок маніпулятора.

Визначення координат центрів ваги ланок маніпулятора.


```

yC=(yC1*P1+yC2*P2+yC3*P3+yC4*P4)/P;
#Визначення моменту перекидання та кое-
фіцієнту стійкості#
MOPR=Q*(H-A1A); MUD=P*(xC-OA1);
kust=MUD/MOPR;
#Рівняння рівноваги частин маніпулятора#
P.x1 = XO-XA;
P.y1 = YO-YA-P1;
P.fi1=-M-YA*OA1+XA*A1A-P1*OA1/2;
P.x2 = XA-Q*cos(alfa);
P.y2 =YA+N-P2-P3-P4-Q*sin(alfa);
P.fi2 =(N-0.5*P2-P3-P4-
Q*sin(alfa))*A1B+Q*cos(alfa)*(H-A1A);
#Реакції в узлах маніпулятора#
R0=sqrt(XO^2+YO^2); RA=sqrt(XA^2+YA^2);
RB=sqrt(XB^2+YB^2); RC=sqrt(N^2+FTR^2);
#ЗАВДАННЯ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ#
#1 - Вплив ваги ланок маніпулятора#
fi=pi/3; Q=20; m1=5; m2=m1;
m3=2*m1; m4=4*m1;
#m1=15; m2=m1; m3=2*m1; m4=2*m1;#
#m1=2.5; m2=m1; m3=2*m1; m4=4*m1;#

#2 - Вплив положень маніпулятора #
#fi=0.25*pi/2;# #fi=pi/4;# #fi=pi/2;#
#fi=3*pi/4;# #fi=5/4*pi;# #fi=7/4*pi;#

#3 - Вплив розмірів ланок маніпулятора#
fi=pi/4; r=1; AB=r; R=0.5*r; H=2*AB;
#r=1; AB=2*r; R=0.25*r; H=2*AB;#
#r=0.5; AB=3*r; R=0.25*r; H=4*AB;#

#Інструкції до розрахунку#
НЕИЗВЕСТНЫЕ:= XO,YO,XA,YA,N,M;
ПОКАЗАТЬ:=N,M,RO,RA,RB,RC,kust,xC,yC,P;
ВАРЬИРОВАТЬ := alf(alf0, alfk);
РАСЧЕТ := СТАТИКА;
КОНЕЦ;

```

Перевірка на стійкість до перекидання.

Рівняння рівноваги кривошипа в осях Ox_1y_1 , шатуна в осях Ox_2y_2 , відносно реакцій в шарнірах O, A, B маніпулятора: $X_O, Y_O, X_A, Y_A, X_B, Y_B$.

Підрахунок реакцій в шарнірах O, A, B маніпулятора: R_O, R_A, R_B, R_C .

Завдання для досліджень: 1 – варіювання вагою ланок маніпулятора.

Завдання для досліджень: 2 – варіювання положенням кривошипу $0 < \varphi < 2\pi$.

Завдання для досліджень: 3 – варіювання розмірами ланок маніпулятора та радіусом колеса.

Інструкції до розрахунків (обов'язково): варіювати кутом нахилу сили Q $\alpha \in [0, \pi]$ та показати результати у формі графіків (талиць).

7.5. Робота 5. Дослідження коливань візків із пружно-дисипативним зчепленням шляхом моделювання динаміки точки

Мета роботи – визначення закономірностей при коливальному русі теліжки за наявності пружно-в'язкого зчеплення та сили збудження.

Об'єкт досліджень – візок масою M (рис. 7.17), який за допомогою пружно-в'язкого зчеплення (із жорсткістю c та коефіцієнтом опору β) пов'язана із нерухомою опорою. Візок здійснює рух вздовж осьової координати x при початковому відхиленні $x(0) = x_0$, початковій швидкості $\dot{x}(0) = v_0$ та під дією періодичної сили $F = F_a \sin(pt + \alpha)$, де F_a – амплітуда, p – частота, α – початкова фаза збудження.

Предмет досліджень – кінематичні та динамічні характеристики матеріальної точки при вільних та вимушених коливаннях.

Методи досліджень містять аналітичне та комп'ютерне моделювання.

Завдання

1. Вивчити закономірності вільних коливань матеріальної точки у відсутності та при наявності в'язкого опору. Дослідити закономірності гасіння коливань при наявності в'язкого опору. Дослідити перетворення енергії при вільних коливаннях матеріальної точки. Познайомитися з фазовою діаграмою як зручним засобом графічного уявлення про процеси коливань.

2. Вивчити закономірності вимушених коливань матеріальної точки у відсутності та при наявності в'язкого опору. Дослідити вплив в'язкого опору на вимушені коливання. Дослідити перетворення енергії при вимушених коливаннях матеріальної точки. Визначити закономірності фазової діаграми для процесів вимушених коливань у відсутності та при наявності в'язкого опору.

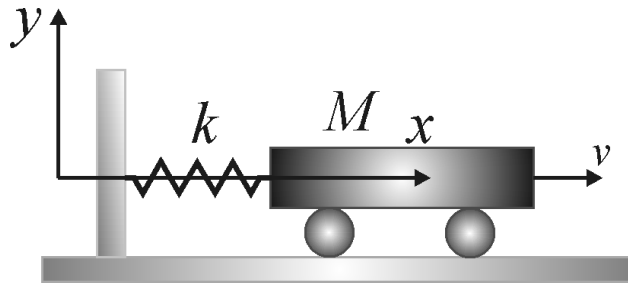


Рисунок. 7.17 – Механічна система

Аналітичне моделювання

У даному випадку візок здійснює зворотно-поступальний рух, тому для моделювання цього процесу можна скористатися відповідними співвідношеннями динаміки матеріальної точки.

Якщо скласти диференціальне рівняння руху точки у даному випадку за наявності поновлюючої (пружної) сили, сили в'язкого опору та сили збудження, то можна одержати таке диференціальне рівняння:

$$M\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = F_a \sin(pt + \alpha),$$

із початковими умовами

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0.$$

Перетворимо рівняння руху до наступного:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = G \sin(pt + \alpha),$$

де $h = \frac{\beta}{2M}$ – коефіцієнт затухання; $k = \sqrt{\frac{c}{M}}$ – власна (кругова) частота;

$G = \frac{F_a}{M}$. Якщо розв'язувати рівняння (7.15) за різних значень параметрів, які до нього входять, то можна досліджувати різні режими коливань матеріальної точки.

Також дієвим інструментом дослідження руху є розгляд перетворень механічної енергії. При коливаннях кінетична T , потенціальна Π та повна E енергія матеріальної точки визначаються таким чином:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2; \quad \Pi = \frac{1}{2} c x^2; \quad E = T + \Pi = \frac{1}{2} (M \dot{x}^2 + c x^2).$$

Як відомо, при власних коливаннях повна енергія зберігається, тобто є константою та може бути визначена через початкові значення переміщення та швидкості:

$$E = T + \Pi = E_0 = T_0 + \Pi_0 = \frac{1}{2} (M \dot{x}_0^2 + c x_0^2) = \text{const}.$$

Зміна кінетичної енергії точки за одиницю часу дорівнює потужності сил, які діють на точку:

$$\frac{dT}{dt} = N; \quad N = (-\beta \dot{x} - cx + F_a \sin(pt + \alpha)).$$

Комп'ютерне моделювання

При комп'ютерному моделюванні розглянемо візок з такими параметрами: $M = 240$ кг; $c = 2400 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$; $\beta = 120 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}$; $G = 1 \text{ м} \cdot \text{с}^2$. За цими даним визначимо: коефіцієнт затухання: $h = 0.25 \text{ с}^{-1}$; власну частоту: $k = \sqrt{c/M} \approx 3.163 \text{ с}^{-1}$; частоту затухаючих коливань: $\omega = \sqrt{k^2 - h^2} \approx 3.152 \text{ с}^{-1}$. У подальших дослідженнях будемо варіювати рівнями амплітуди $F_a = G \cdot M$, частоти $p = a\omega$ та початкової фази $\alpha = f\pi$ періодично змінюваної зовнішньої сили, та рівнем демпфування зчеплення візка $b = \beta = 2hM$, за значеннями параметрів G , a , f , h . За варіюванням G можна моделювати умови для вільних $G = 0$ та вимушених $G \geq 1$ коливань візка. За варіюванням $(0 \leq a \leq 1)$ можна моделювати різні режими коливань, наприклад, дорезонансні $(0 < a < 1)$, резонансні $(a = 1)$ коливання, та такі процеси, як биття $(a \approx 1)$. За варіюванням h можна моделювати умови відсутності $h = 0$ та наявності в'язкого опору руху $h \geq 0.25$. Далі наводиться текст файлу вихідних даних для ПК КіДиМ, за допомогою якого можна досліджувати різні режими коливань.

Текст файлу

```
РАБОТА:= Робота №5;
ВЫПОЛНИЛ:= Петренко Т.Б., І-16а;

# Вихідні дані:
h,G,a,f - параметри, що варіюються #
m=240; c=2400; b=2*h*m; Fa=m*G;
p=a*w; alfa=f*pi;

# КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ #

J.x=m;
P.x=-b*x'-c*x+Fa*sin(p*t+alfa);
# Частоти та період коливань #
k=sqrt(c/m); T=2*pi/w;
w=sqrt(k^2-h^2);
# Кінетична, потенціальна та повна енергія #
Tk=m*x'^2/2; П=c*x^2/2;
Tk0=m*v0^2/2; П0=c*x0^2/2;
Е=Тк+П; Е0=Тк0+П0;
# Зміна кін. енергії, потужність сил#
Т'=m*x'*t*x'*t't;
N=-c*x-b*x't+Fa*sin(p*t+alf))*x't;

#<АЧХ + ФАЗОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ>#
q=2.5*t/tk; P=q*k; n=0.05;
n1=0.25;n2=0.5; n0=1.0;
A=1/sqrt((1-q^2)^2+n^2*q^2);
fi=arccos((1-q^2)*A);
A1=1/sqrt((1-q^2)^2+n1^2*q^2);
fi1=arccos((1-q^2)*A1);
A2=1/sqrt((1-q^2)^2+n2^2*q^2);
fi2=arccos((1-q^2)*A2);
A3=1/sqrt((1-q^2)^2+n0^2*q^2);
fi3=arccos((1-q^2)*A3);

#ДОСЛІДЖЕННЯ РЕЖИМІВ КОЛИВАНЬ#
#1 - ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ#
h=0.0; G=0; f=a=v0=0; x0=0.1; tk=10;
# c=3600;# # c=2400; m=320;#
```

Коментар

Назва роботи та виконавець (обов'язково).

b, h – узагальнені коефіцієнти опору й затухання, **G, p, alf** – амплітуда, частота, початкова фаза збудження.

J.x – інерційний коефіцієнт, **P.x** – сили, що діють на тіло; **k, T** – кругова частота та період коливань; **w** – частота затухаючих коливань. **Тк, П, Тк0, П0** – поточні та початкові значення кінетичної та потенційної енергії; **Е, Е0** – поточне та початкове значення повної енергії, **Т'** – швидкість зміни кінетичної енергії, **N** – потужність сил, що діють на тіло.

Завдання для досліджень:

Амплітудні та фазочастотні характеристики в умовах вимушених коливань (відносний коефіцієнт затухання – $n = 2h/k$ зростає).

Завдання для досліджень:

1 – вільні коливання (коефіцієнт жорсткості чи маса зростають).

```

# 2 - ЗАТУХАЮЧИ КОЛИВАННЯ#
# m=240; c=2400; h=0.079;
G=f=a=v0=0; x0=0.1; tk=75;#
#h=0.395; G=f=a=v0=0; x0=0.1;
tk=25;#
#h=0.079; G=1; f=0; a=0.75; x0=0.1;
v0=0; tk=75;#
#3 - ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ БЕЗ ОПОРУ#
# h=f=v0=0; G=1; a=0.5;
x0=0.01; tk=40;#
#h=f=v0=0.0; G=2; a=1.5; x0=0.01;
tk=40;#
#<РЕЗОНАНС># #h=0.0; G=2; f=0; a=1;
x0=0; v0=0; tk=40;#
#<БИТТЯ># #h=0.0; G=2; f=0; a=0.96;
x0=0.01; v0=0; tk=100;#
#4 - ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ІЗ ОПОРОМ #
#h=0.395; G=1; f=0; a=0.75; x0=0.1;
v0=0; tk=40;#
#h=0.079; G=1; f=0; a=0.75;
x0=0.1; v0=0; tk=75;#
#<БИТТЯ># #h=0.395; G=1; f=0;
a=0.96; x0=0.1; v0=0; tk=100;#
#РЕЗОНАНС# #h=0.395; G=1; f=0;
a=1.00; x0=0.01; v0=0; tk=100;#
Начальные усло-
вия: t(0), x(x0), x'(v0);
Конечные условия: =t(tk);
ПОКАЗАТЬ := x, x' t, x' t' t, x' t(x);
СРАВНИТЬ := r(E, E0, Tk, П),
r1(T', N), r2(k, w, P);
СРАВНИТЬ := r3(A, A1, A2, A3),
r2(fi, fi1, fi2, fi3);
РАСЧЕТ:=ПЕЧАТЬ УРАВНЕНИЙ;
КОНЕЦ;

```

Завдання для досліджень:

2 – гасіння вільних коливань (коефіцієнт затування зростає).

Завдання для досліджень:

3 – вимушені коливання без в'язкого опору (амплітуда та частота вимушеної сили зростають); додатково вивчаються режими резонансу та биттів.

Завдання для досліджень:

4 – вимушені коливання з в'язким опором; додатково вивчаються режими резонансу та биттів.

Інструкції до розрахунків
(обов'язково).

Призначити початкові умови й інтервал процесу коливань, показати результати по виконаним завданням у формі графіків

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

1. Павловський М.А. Теоретична механіка : підручник. / М.А. Павловський. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Смерека І.П. Короткий довідник з теоретичної механіки : навч. посіб. / І.П. Смерека, А.Ф. Барвінський, Б.Д. Білоус та ін. – Львів: Інтелект-Захід, 2001. – 240 с.
3. Андреев Ю.М. Практикум по теоретической и аналитической механике с применением ПЭВМ : учеб. пособ. / Ю.М. Андреев, Е.И. Дружинин, А.А. Ларин. – Х.: НТУ «ХПИ», 2004. – 100 с.
4. Лавинский Д.В. Информационные технологии в аналитической механике : учеб. пособ. / Д.В. Лавинский, О.К. Морачковский. – Х.: НТУ «ХПИ», 2007. – 184 с.
5. Бутенин Н.В. Введение в аналитическую механику : учебник. / Н.В. Бутенин, Н.А. Фуфаев. – М.: Наука, 1991. – 256 с.
6. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике : учебник. / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1966. – 300 с.
7. Павловський М.А. Аналітична механіка : підруч. / М.А. Павловський, В.І. Заплатний. – К.: НМК ВО, 1990. – 144 с.
8. Практикум з теоретичної механіки: дистанційний курс. – Режим доступу: <http://dl.kpi.kharkov.ua/techn/tu16/default.asp?rus>.
9. Мушенков Ю.А. Методические указания к выполнению компьютерных работ по дисциплине «Теоретическая механика» / Ю.А. Мушенков, В.Т. Вышинский. – Днепропетровск: НМетАУ, 1999. – 26 с.
10. Яскілка М.Б. Збірник завдань для розрахунково-графічних робіт з теоретичної механіки : навч. посіб. / М.Б. Яскілка. – К.: Вища школа, Веселка, 1999. – 351 с.

Навчальне видання

АНДРЕЄВ Юрій Михайлович
ЛАВІНСЬКИЙ Денис Володимирович
МОРАЧКОВСЬКИЙ Олег Костянтинович

Теоретична механіка. Комп'ютерний практикум

Навчальний посібник
для студентів спеціальностей
«Комп'ютерні науки» та «Комп'ютерна механіка»
Інженерно-фізичного факультету

Роботу до друку рекомендував Д.В. Бреславський

Редактор М.П. Єфремова

План 2014 р. п. 6
Підп. до друку р. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум.-друк. арк.
Наклад 100 прим. Зам. № . Ціна договірна.

Видавничий центр «НТУ ХП».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

Друкарня «НТУ ХП». 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21